Сліди світів та їхнє застосування.

Або: як перевинайти і узагальнити диференціальне числення.

Коли мене питали, чим займаюся, я відповідав: Розробляю диференціальне числення, яке ми усі вчили, але в такій загальності, яка б не потребувала $XY = YX$.

(Одного разу, у Києві, це викликало вибух сміху. Було незручно, бо сталося одразу після похорону).

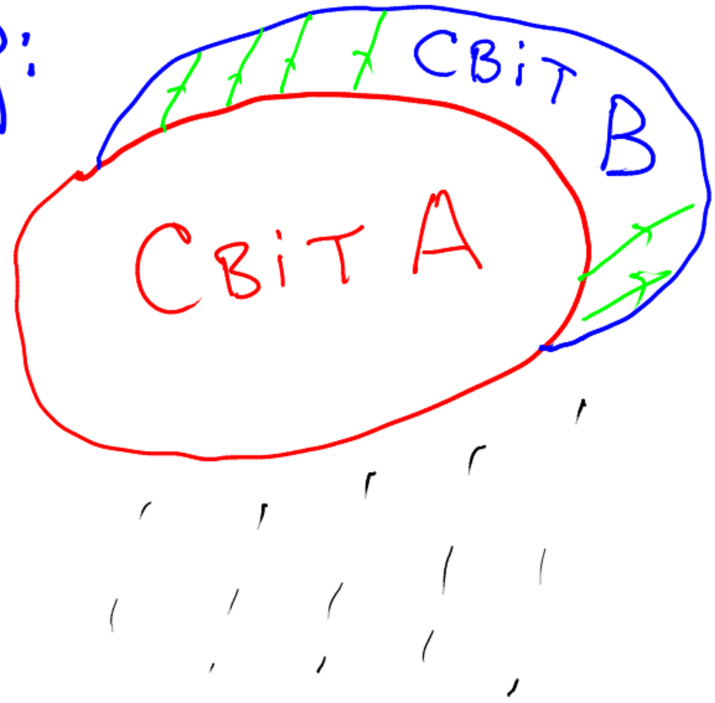
Тепер частіше відповідаю:
Намагаюся зрозуміти закони диференціального числення і те, як вони передрікають існування інших світів.

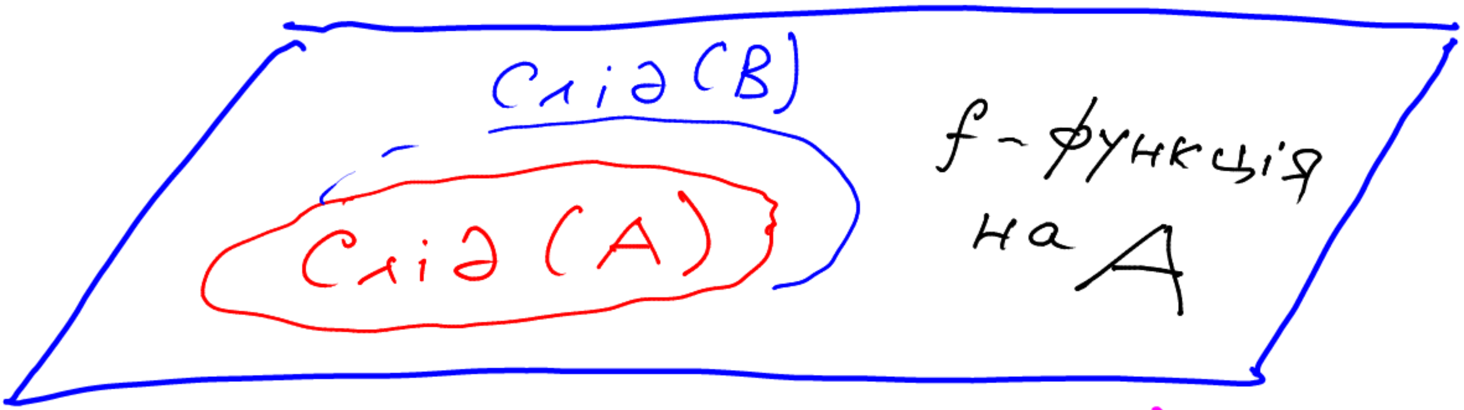
(Інтерес до існування і властивостей інших світів викликаний декількома обставинами, серед них: 1) теорія мультіверсів і 2) політичні події в нашому світі).

Картинка, яку я намагатимемуся пояснити і обгрунтувати: В класиці:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad 1)$$

Тепер:





$$df = \underset{B \to A}{\text{"}\lim\text{"}} (\ldots(f))$$

Що ми розумітимемо під світом, чи простором?

1) Ми вивчатимемо простори в алгебраїчних[1] термінах, тобто через функції (напр. координати)

і їм подібні речі які можна додавати, віднімати, множити.

ІНАКШЕ КАЖУЧИ, ЧЕРЕЗ (АСОЦІАТИВНУ) АЛГЕБРУ

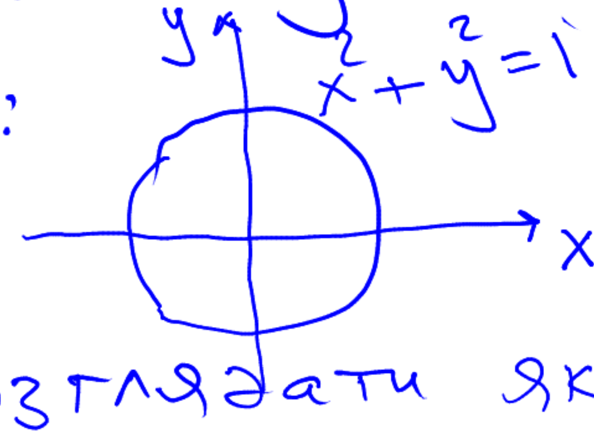
Алгебраїчна геометрія: функції на просторі утворюють АЛГЕБРУ. Простір можна вивчати через цю алгебру. Маємо: $f \cdot g = g \cdot f$

(Головний технічний інструмент алгебраїчної геометрії: Комутативна алгебра).

2). Простір складається з точок. Але: досить рано стало зрозумілим, що поняття точки має бути узагальненим.

Наприклад:

Коло $x^2+y^2=1$



доцільно розглядати як "точку" (площини.

Чому? Це виникає, коли ми намагаємося ПОРІВНЮВАТИ ПРОСТОРИ.

Дві алгебри A, B.

Відображення, чи морфізм:

$$\varphi : A \to B$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$\varphi(a \pm b) = \varphi(a) \pm \varphi(b)$$

ПРИКЛАД: ЗАМІНА ЗМІННОЇ

$A = \mathrm{Func}(x)$ $\quad$ $B = \mathrm{Func}(y)$

$$(\phi f)(y) = f(y + y^2)$$

Гротендік: щоб наша геометрія дозволяла працювати з морфізмами тобто щоб морфізми алгебр насправді переводили точки в точки.

ЧОМУ ЦЕ?

Припустимо, що наш простір — Київ. З чого він складається?
З людей (чи з точок), але також з родин, шкіл, вулиць, районів, ... Можна також думати про весь Київ...

Замість (узагальнених) точок, ми будемо розглядати ОБ'ЄКТИ.

Простір складається з об'єктів.

3) Такі "простори" вивчатимуться в термінах більш загальних "алгебр". Приклад: МАТРИЦІ.

Матриця 2×3 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Матриці $m \times n$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix}1\\2\\\vdots\\m\end{matrix} & \begin{bmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \\ & \begin{matrix}1 & 2 & \dots & n\end{matrix}\end{array}$$

Їх можна складати/віднімати (для кожних m, n)

Можна множити:

$$\underset{m \times \underline{n}}{a} \cdot \underset{\underline{n} \times l}{b} = \underset{m \times l}{c}$$

Множення визначене ЧАСТКОВО

$$M_{m,n} \times M_{n,l} \to M_{m,l}$$

$ab = ba$? питання навіть не має сенсу.

a $\quad b \quad$ ab визначене

$2\times 3 \quad 3\times 3 \quad ba$ – ні

Матриці утворюють більш загальну "алгебру", тобто:

КАТЕГОРІЮ

Категорія $\mathcal{C}$:

a) Об'єкти $x, y, z, \ldots$

b) Множина $\mathcal{C}(x,y)$ для кожної пари об'єктів

c) Множення

$$\underbrace{\mathcal{C}(x,y)}_{a} \times \underbrace{\mathcal{C}(y,z)}_{b} \to \underbrace{\mathcal{C}(x,z)}_{a\cdot b}$$

$$(ab)c = a(bc)$$

Можна окремо вимагати:

d) на кожній $C(x,y)$ є + та −. Аксіоми: звичайні. (аддитивна категорія).

Приклад: матриці утворюють аддитивну категорію.

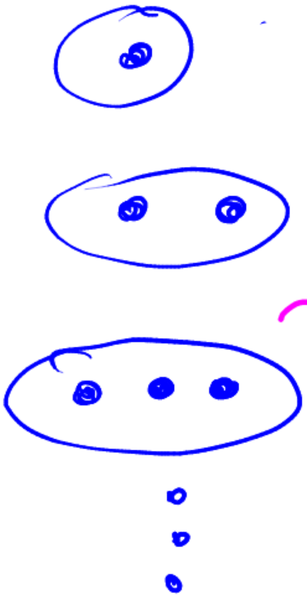
Об'єкти: 1, 2, 3, ...

До чого тут простори / функції?

Уявимо собі "простір", утворений об'єктами 1, 2, 3, ...

Функції на об'єкті $\underline{\underline{n}}$, − це n-ки чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Матриці $m \times n$ − це лінійні перетворення $\mathfrak{Func}(m) \to \mathfrak{Func}(n)$



об'єкт 1

об'єкт 2

Три внутрішніх ступені свободи

об'єкт 3

⋮

Функція на об'єкті 3:

Об'єкт n має n внутрішніх ступенів свободи

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$ трійка чисел.

2)

4). КОМПЛЕКСИ.

Загальний феномен:

Те, що ми бачимо в геометрії, фізиці, ... — лінійні простори, утворені функціями

це насправді КОМПЛЕКСИ

Крім того, це ми бачимо, є це

щось, що ~~скорочуєтся~~.

Комплекс — це низка лінійних просторів $\ldots, V^{-1}, V^0, V^1, \ldots$ і лінійних перетворень

$$\ldots \longrightarrow V^{-1} \xrightarrow{\partial} V^0 \xrightarrow{\partial} V^1 \xrightarrow{\partial} V^2 \longrightarrow$$

таких, що

$$\partial(\partial v) = 0$$

або просто: $\partial \cdot \partial = 0$

або: $\boxed{\partial^2 = 0}$

Приклад V^0, V_1, V_2 два лінійних простори розмірності 2 (тобто V^0, V^1, V^2 складаються з пар чисел (x_1, x_2).

Лінійне перетворення ∂:

$$\cdots 0 \to V^0 \xrightarrow{\partial} V^1 \xrightarrow{\partial} V^2 \to 0 \to \cdots$$

$$\partial = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \partial = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Маємо $\partial^2 = 0$, бо

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

$$(x_1, x_2) \overset{\partial}{\longmapsto} (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (0, x_1) \overset{\partial}{\longmapsto} (0, x_1)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

<u>Цикли</u> комплексу $V^\bullet$:

вектори v в V^k такі, що $\partial v = 0$

<u>Границі</u> комплексу $V^\bullet$:

вектори v в V^k, які мають вигляд ∂w для w в V^{k-1}.

Кожна границя є циклом, але необов'язково навпаки.

Головний інваріант комплексу $V^\bullet$:

Когомології =

$$= \frac{\text{Цикли}}{\text{з точністю до границь}}$$

або $\dfrac{\text{Цикли}}{\text{Границі}}$ (фактор простору по підпростору)

=

Загальний принцип:

Лінійні простори, які ми

спостерігаємо в житті — це КОМПЛЕКСИ, точніше: когомології комплексів, точніше: більші лінійні простори, де деякі вектори скорочуються (тобто: ω скорочується з $\partial\omega$).

ЧОМУ? Спочатку приклад

Наш світ: сфера радіусу R (більш-менш).

Лінійний простір:

$\mathcal{L} = \{$Функції на сфері$\}$

Але: ця сфера знаходиться в трьохмірному просторі

Точки цього простору: трійки x, y, z.

Рівняння сфери: $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V^{-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & V^{0} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & 0 \arrow[r] & 0 \\ & \mathrm{Func}(x,y,z) & \mathrm{Func}(x,y,z) & & \end{tikzcd}$$

$$f(x,y,z) \overset{\partial}{\longmapsto} (x^2+y^2+z^2-R^2)\, f(x,y,z)$$

В V^{-1}: $\{$цикли$\} = \{$границі$\} = \{0\}$

В V^{0}: $\{$цикли$\} =$ усе V^{0}.

$\{$границі$\} =$ кратні $x^2+y^2+z^2-R^2$

тобто: функції, які на сфері нуль.

$\{\text{Цикли}\} / \{\text{Границі}\} =$

$= \mathrm{Funct}(\text{Сфера}).$

=

Висновок: ті лінійні простори, що ми спостерігаємо – це частина чогось більшого тобто – когомології комплексів. Це прояв того факту, що ми не можемо жити окремо від нашого оточення. 3) (Хоча: інший принцип геометрії – вивчати внутрішню геометрію нашого простору, безвідносно щодо оточення).

Досить задовільний рівень узагальнення для нас:

"Простір" - це Диференціальна градуйована категорія, б)

1) Об'єкти $X, Y, Z, \ldots$

2) <u>Комплекси</u> $C^{\bullet}(X, Y)$

3) <u>Множення</u>, чи <u>композиція</u>

$$C^p(X,Y) \times C^q(Y,Z) \to C^{p+q}(X,Z)$$

$$a \qquad b \rightsquigarrow ab$$

$$\partial(ab) = \partial a \cdot b + (-1)^p a \cdot \partial b$$

та $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(a \pm b)c = ac \pm bc, \ldots$$

Як зрозуміти / перевинайти / узагальнити диференційне числення? I

Вивчаючи диф. числення:

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$f(x) = A := \mathrm{Func}(x)$ (функції від x)

Багато змінних:

$\mathrm{grad}(f)$; div;

$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f(x, y) = 0$; ⁝⁝⁝

В розмірності три з'являється

$\vec{f} \times \vec{g} = \vec{h}$; в розмірностях > 3

зникає... також rot; ...

Як це зрозуміти?

Елі Картан:

Велика частина цього усього — це одна конструкція:

диференціальні форми. Мають сенс для будь-якого гладкого многовиду X.

$$\Omega^j(X),\ j \geq 0;$$

$\Omega^0(X)$ — це функції на X;

<u>множення</u> (асоціативне)

$$\Omega^j \times \Omega^k \to \Omega^{j+k}$$
$$\omega_1 \qquad \omega_2 \qquad \omega_1 \cdot \omega_2$$

і диференціал де Рама:

$$\Omega^j \xrightarrow{d} \Omega^{j+1}$$
$$\omega \rightsquigarrow d\omega$$

<u>Задовольняють:</u> $\omega_1 \cdot \omega_2 = (-1)^{jk}\omega_2\omega_1$,

$$d(\omega_1 \omega_2) = d\omega_1 \cdot \omega_2 + (-1)^j \omega_1 \cdot d\omega_2$$

І крім того: $dd\omega = 0$

$$d^2 = 0$$

<u>Приклад</u> функції однієї змінної

(X — <u>пряма</u>)

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0 & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^1 \\ \| & & \| \\ \{f(x)\} & & \{g(x)dx\} \end{array}$$

$$df(x) = f'(x)dx$$

Дві змінних (X — площина)

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^1 & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^2 \\ \| & & \| & & \| \\ \{f(x,y)\} & & \{f(x,y)dx + g(x,y)dy\} & & \{h(x,y)dxdy\} \end{array}$$

$$f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy; \quad fdx + gdy \mapsto \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

grad

div

В розмірності три:

$$\Omega^0 \xrightarrow{\text{grad}} \Omega^1 \xrightarrow{\text{rot}} \Omega^2 \xrightarrow{\text{div}} \Omega^3$$

Факт: $\Omega^\bullet(X)$ – (комутативна) диференціальна градуйована алгебра (або Д.Г. категорія з єдиним об'єктом).

Тепер: замість простору X – алгебра A. Можемо робити $a \pm b$, ab; $(ab)c = a(bc)$ але $ab \neq ba$.

Крок 1. Будуємо Д.Г. алгебру $\Omega^\bullet_A$; $A = \Omega^0_A$; відмовляємося від $\omega_1\omega_2 = \pm\omega_2\omega_1$.

Ω^n_A = формальні суми

$$\sum a_0\, da_1\, da_2 \dots da_n .$$

Як їх множити? Користуючися правилом

$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db,$$

переганяємо всі dа праворуч:

$$a_0 da_1 \cdot b_0 db_1 = a_0 d(a_1 b_0) db_1 - a_0 a_1 \cdot db_0 \cdot db_1$$

Диференціал де Рама:

$$d(a_0 da_1 da_2 \dots) = da_0 da_1 da_2 \dots$$

Когомології d? Бачимо, що d навіть не використує множення в алгебрі A.

$$H^0 = k; \quad H^{>0} = 0$$

$(k = \{\text{числа}\})$

Тобто: лема Пуанкаре є, але занадто дужа; вірна для усіх просторів.

Як це використати? З цього випливає:

Будь-який морфізм $A \xrightarrow{\phi} B$, росповсюджений до $\phi: \Omega^\bullet_A \to \Omega^\bullet_B$, діє на когомологіях тривіально (бо когомології — це нуль).

Нехай $A = B$; $\phi: A \to A$

За простими правилами алгебри, мусить існувати

гомотопія

$$\iota_\phi : \Omega^\bullet_A \to \Omega^{\bullet-1}$$

$$d\,\iota_\phi(\omega) + \iota_\phi d(\omega) = \omega - \phi(\omega), \ \forall \omega$$

Можна також добитись;

$$\iota_\phi \iota_\phi \omega = 0 \qquad \iota_\phi^2 = 0$$

__Тепер__: спробуємо знайти таку η_ϕ не як-небудь, а щоб вона задавалася __формулою__ в термінах множення на A.

Приклад:

$\eta_\phi(da)$ мусить бути $\phi(a) - a$;

насправді,

$$\eta_\phi(a_0 da_1) = a_0 \cdot \phi(a_1) - a_1 a_0;$$

$\eta_\phi(a_0 da_1 da_2)$, ... даються простою формулою 5).

Маємо

$$d\iota_\phi + \iota_\phi d = 1 - \phi$$

$$\iota_\phi^2 = 0$$

Тепер: розглянемо випадок $\phi = 1$, тобто $\phi(a) = a$. Позначимо $\iota_\Delta := \iota_{\phi=1}$. Маємо

$$\boxed{\begin{aligned} &d\iota_\Delta + \iota_\Delta d = 0 \\ &\iota_\Delta^2 = 0; \qquad d^2 = 0 \end{aligned}}$$

Таким чином, $\Omega_A^\bullet$ отримує нову структуру комплексу; диференціал в ньому — ι_Δ.

МАЙЖЕ ВІРНО:

1) Комплекс $\Omega^{\bullet}_{A}, 1_{\Delta}$ – це узагальнення лінійного простору диференціальних форм $\Omega^{\bullet}(X)$ на ситуацію, коли X змінено на будь-яку алгебру A.

2) d – узагальнення диференціалу Де Рама.

Насправді має місце трошки делікатніша форма цього твердження (Гінзбург – Шедлер).

Нагадаємо:

$$1_{\Delta}(a_0 d a_1) = \boxed{a_0 a_1 - a_1 a_0}$$

Комутатори і сліди.

Ключова формула:

$$\mathrm{tr}(ab-ba)=0$$

Звідси маємо:

Будь-який слід на алгебрі A анулює образ ι_Δ, тобто <u>границі</u> для диференціалу ι_Δ.

Про сліди:

$$\underset{m\times m}{\mathrm{tr}(a)} = a_{11}+a_{22}+\dots+a_{mm}$$

Головна властивість:

$$\mathrm{tr}(\underset{m\times n}{a}\,\underset{n\times m}{b}) = \mathrm{tr}(\underset{n\times m}{b}\,\underset{m\times n}{a})$$

$$\begin{tikzcd}
\underline{m} \arrow[loop left, "ab"] \arrow[r, bend left, "a"] & \underline{n} \arrow[l, bend left, "b"] \arrow[loop right, "ba"]
\end{tikzcd}$$

Те, що образ $\iota : \Omega^1_A \to A$ – це елементи $ab-ba$ та їхні суми, вмикає різноманітні дзвіночки (навіть сирени). Наприклад:

Як перевинайти диференціальне числення, II.

Ми бачимо, що наше узагальнення диференціальних форм $\Omega^\bullet(X)$ – це комплекс

$$\ldots \to V^{-2} \to V^{-1} \to A$$

образ диференціалу в A – це комутатори $a_0 a_1 - a_1 a_0$ та їхні суми. Але існує стандартний шлях "розв'язати" співвідношення $a_0 a_1 - a_1 a_0 = 0$. Це інший комплекс (комплекс Гохшільда).

Позначимо його $C_\bullet(A)$ (пізніше він з'явиться як $TR_A(1)$).

<u>І справді:</u> як було відомо з ранніх 60-х (Гохшільд-Костант-Розенберг), якщо алгебра A - це функції на <u>гладкому</u> многовиді, то $C_\bullet(A)$ є еквівалентним комплексу $\Omega^\bullet(X)$ з диференціалом <u>нуль.</u> Тепер можна пошукати аналог диференціалу де Рама $d: C_\bullet(A) \to C_{\bullet+1}(A)$. Він існує (був знайдений Райнгартом, потім забутий, потім перевинайдений Конном і многою). Результат: циклічні гомології ('81)

Загальне поняття:

Категорія зі слідом

Об'єкти: $x, y, z, \ldots$

$C(x,y)$ для кожної пари об'єктів

$$\underset{a}{C(x,y)} \times \underset{b}{C(y,z)} \to \underset{ab}{C(x,z)}$$

Також: лінійний простір K

$$tr_x : C(x,x) \to K \; ; \; tr_x(ab) = tr_y(ba)$$

У випадку матриць:

об'єкти: ~~1, 2, 3, ...~~

Скінченовимірні лінійні простори

$$K = \{\text{числа}\}$$

Що ми поки що зрозуміли, і що ми побачимо далі?

1. Для нас "простори" – це ДГ категорії.
(Алгебри, чи кільця – це ДГ категорії з одним об'єктом і з $\partial = 0$).

2. Узагальнення диференціальних форм відбувається таким чином:
З алгебри A будується комплекс

$$\dots \xrightarrow{\iota_\Delta} \Omega^2_A \xrightarrow{\iota_\Delta} \Omega^1_A \xrightarrow{\iota_\Delta} A$$

Образ $\left(\Omega^1_A \xrightarrow{\iota_\Delta} A\right)$ – це $[A, A]$ комутатори.

Це те, що нам замінює форми $\Omega^\bullet(X)$ з класичного диференціального числення. (Вони теж – комплекс, де диференціал $= 0$).

2' Диференціал

$$\Omega^0_A \xrightarrow{d} \Omega^1_A \xrightarrow{d} \Omega^2_A \xrightarrow{d} \dots -$$

це те, що заміняє для нас диференціал де Рама (тобто власне похідну і її варіанти: div, grad, rot, ...)

Маємо бікомплекс:

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} \arrow[r, "d"] & \Omega^1_A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"'] & \Omega^2_A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"] & {} \\
{} \arrow[r, "d"] & \Omega^0_A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"'] & \Omega^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

...

АЛЕ ТАКОЖ: (піднімемося вгору на один поверх)

③ Категорії ("простори") утворюють категорію (як будь-який клас математичних об'єктів). Але:

КАТЕГОРІЇ УТВОРЮЮТЬ:

а) КАТЕГОРІЮ В КАТЕГОРІЯХ (або 2-категорію)

$$A \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} B$$

Два морфізма (скажімо) алгебр.

$$\phi(a_1 \pm a_2) = \phi(a_1) \pm \phi(a_2)$$ те ж саме
$$\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\,\phi(a_2)$$ для ψ.

$$C(\phi, \psi) = \{ b \in B \mid \phi(a)\,b = b\,\psi(a) \text{ для всіх } a \text{ в } A \}$$

Приклад $A = B$, $\phi = \psi \doteq id$ $\phi(a) = a$

$$C(id, id) = \text{Центр}(A)$$

b) Більш того: 2-категорію зі

слідом.

Тобто:

- об'єкти: простори/світи/ДГ категорії.

(а насправді: потребуємо щось значно загальніше...)

- $C(A,B)$ – (була множина) тепер категорія

(її об'єкти: морфізми $\phi, \psi, \ldots : A \to B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\phi"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\psi"'{name=D}] & B \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "b"] \end{tikzcd}$$

- Для двох об'єктів:

$C(\phi, \psi)$ НАЇВНО: це

$$\{ b \mid \phi(a) b = b \psi(a), \forall a \}$$

Це було відомо більш ніж за сто років тому. (Моріта...)

Насправді,

$C(\phi, \psi)$ – комплекс; "похідна версія"

• Слід: для алгебри A,
для $\phi: A \to A$,
$TR_A(\phi)$ - тепер не число, а комплекс

Наївно: $TR_A(\phi) = A / \langle \phi(a_0)a_1 - a_1 a_0 \rangle$

Для нас: "похідна версія"

$C(\phi, \psi)$ і $TR_A(\phi)$ - це стандартні комплекси Гохшільда ('46).

Наївні версії $C(\phi, \psi)$ і $TR_A(\phi)$ задовольняють "наївним" аксіомам 2-категорії зі слідом (тривіально).

Питання: Що утворюють ДГ категорії (або "простори")?

(В. Дрінфельд) ?

Відповідь: Вищу ∂-категорію зі слідом.

"**Факт**": Диференціальне числення виникає з того, що

a) ця структура є, і

b) вона-таки вища, а не "наївна".

Як перевинайти диференціальне числення, $\boxed{\text{III}}$

Як диференціал де Рама (похідна) випливає з загальних принципів?

• Кожній алгебрі A і кожному морфізму $A \to A$ — комплекс $TR_A(\phi)$

$TR_A(1)$ — "диф. форми" на "просторі" A

• Коли маємо

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\psi\phi"] \arrow[r, bend left, "\phi"] & B \arrow[l, bend left, "\psi"] \arrow[loop right, "\phi\psi"] \end{tikzcd}$$

$$TR_A(\psi\phi) \approx TR_B(\phi\psi)$$

Тобто:

$$\begin{tikzcd} TR_A(\psi\phi) \arrow[r, bend left, "\phi_*"] & TR_B(\phi\psi) \arrow[l, bend left, "\psi_*"] \end{tikzcd}$$

З загальних принципів сліду:

$$\psi_* \phi_* a = a \qquad \phi_* \psi_* b = b$$

Неможливо (може бути $A = 0 \ldots$). Але можемо очікувати:

$(TR_A^{\bullet}(\phi)$ - комплекси з диференціалом $\partial_\phi)$

$$d_\phi : TR_A^{\bullet}(\phi) \to TR_A^{\bullet-1}(\phi)$$

Так, що

$$\phi_* \psi_* - 1\!\!1 = \partial_{\phi\psi} d_{\phi\psi} + d_{\phi\psi} \partial_{\phi\psi}$$

Це те, що насправді відбувається. Також маємо

$$d_\phi^2 = 0$$

Тепер:

Нехай $A = B$; $\phi = \psi = id$

$TR_1^{\bullet}(A)$, ∂_1 – комплекс

$$d_1 \partial_1 + \partial_1 d_1 = 0$$

$$\partial_1^2 = d_1^2 = 0$$

Знов отримали:

Алгебра A

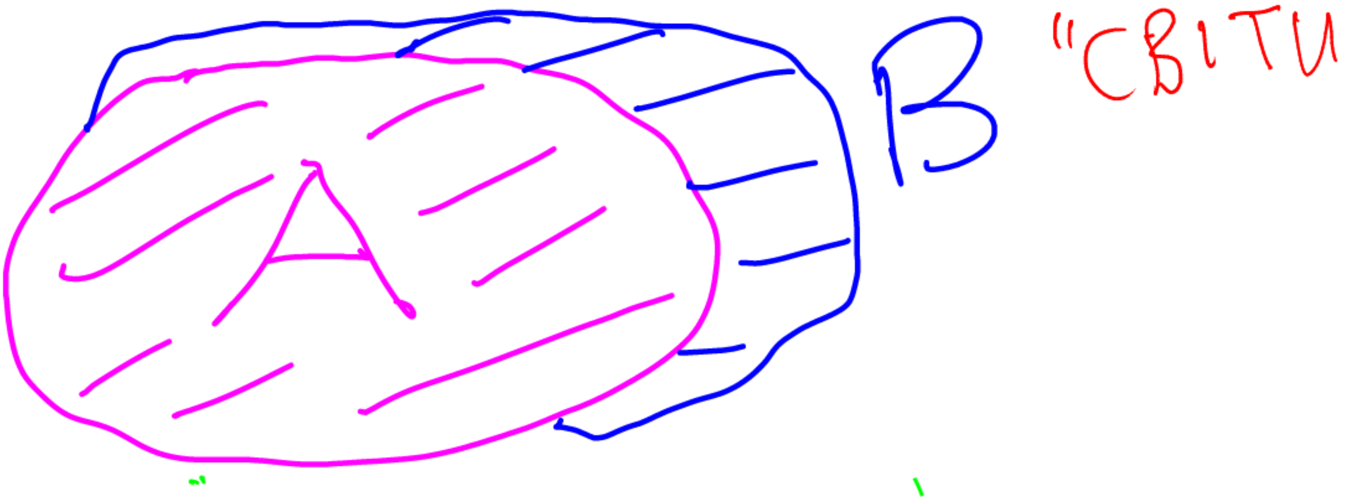
$\rightsquigarrow$

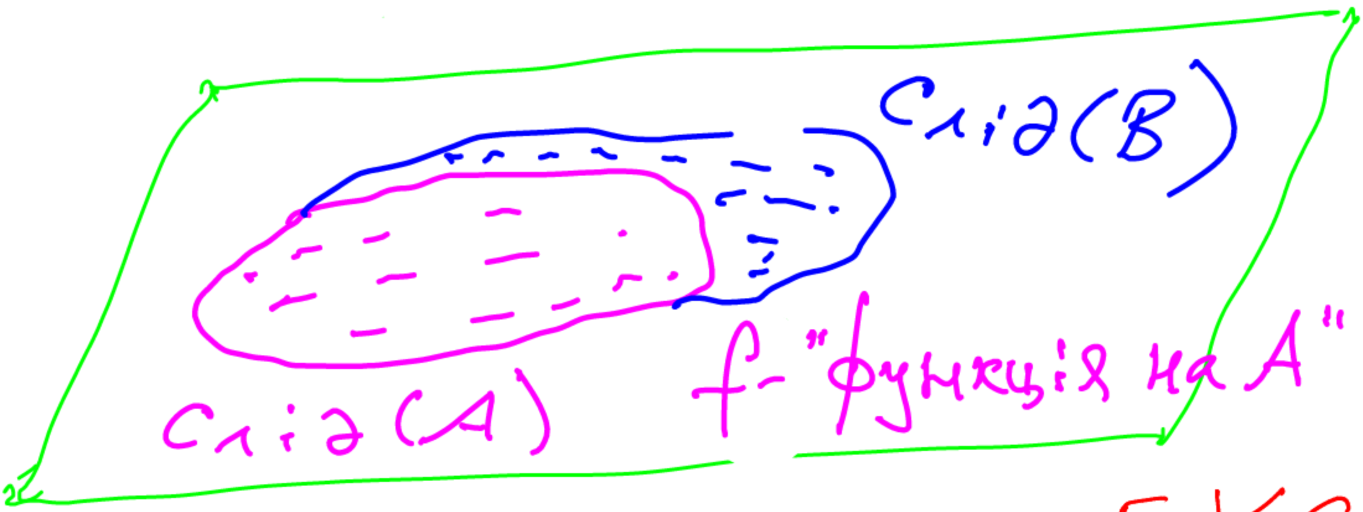
комплекс $TR^{\bullet}(A)$, ∂, d.

A – це "простір $\mathcal{X}$"

$(TR^{\bullet}(A), \partial)$ – це "форми на $\mathcal{X}$"

d – "диференціал де Рама"





КОМПЛЕКСИ

$$df = \text{"}\lim_{B\to A}\text{"}\ (\ldots)$$

Точніше:

$$df = \text{"}\lim_{\substack{B\to A\\ \phi\to 1}}\text{"}\ \big(g \mid \partial g = f - \phi_*(f)\big)$$

(Нагадаємо: $\partial f = 0$ тому що $f \in TR^0_A(\phi)$ і $TR^{-1}_A(f) = 0$; $\partial d + d\partial = 1 - \phi_*$; $f - \phi_*(f) = \partial(df)$)

Не тільки існування диферен-ціалу d, але багато стандартних алгебраїчних властивостей диференціального числення виводяться із структури 2-категорії зі слідом.

Що таке "вища" структура (тобто: в якому сенсі ДГ категорії утворюють вищу 2-категорію зі слідом)?

Також: може, краще усе узагальнити і розглядати <u>вищі</u> ДГ категорії як "простори"?

Спостереження:

$$ab = ba$$

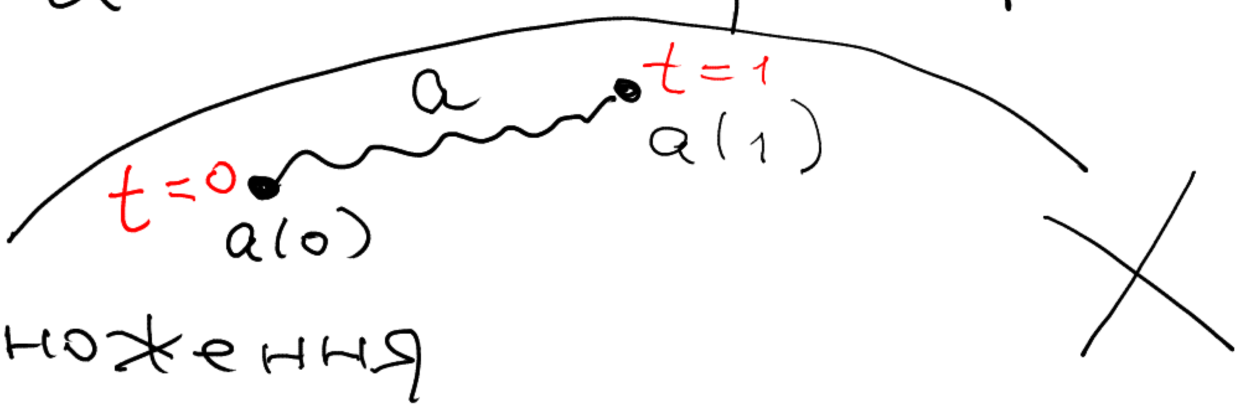
не має бути вірним, і часто не має сенсу.

$$(ab)c = a(bc)$$

має бути вірним, але в послабленій формі. 13)

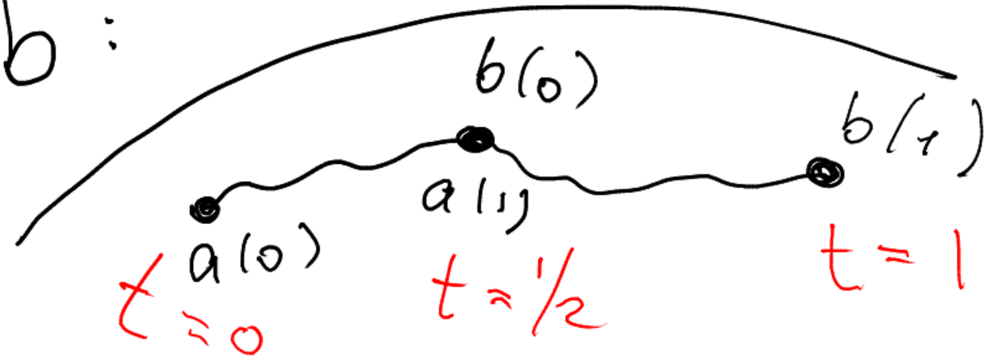
Приклад

a = шлях в просторі X:

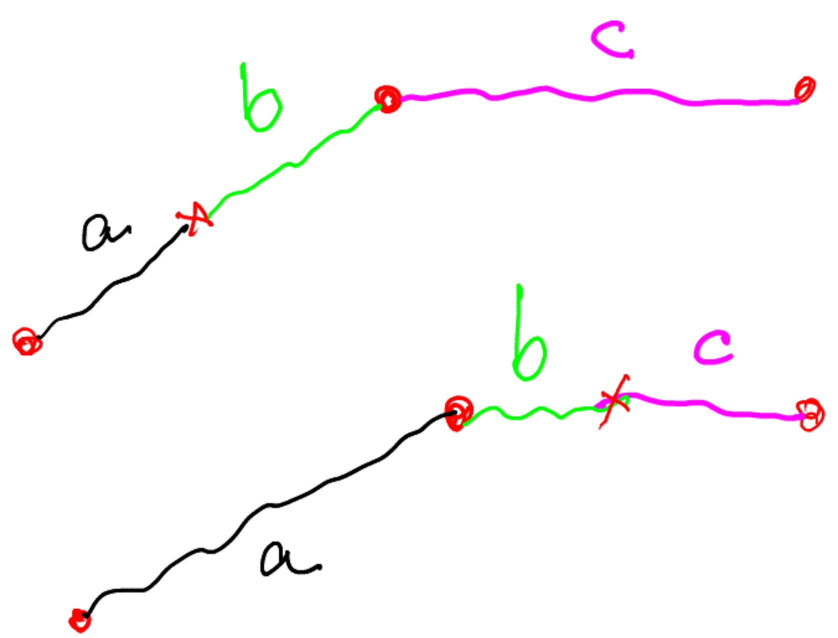


множення

$a \cdot b$:



Маємо <u>майже</u> $(ab)c = a(bc)$



(Той самий шлях, але пройдений за іншим графіком)

Як сформулювати слабкішу версію $(ab)c = a(bc)$? 7)

<u>Ідея 1</u>: потрійне множення $m_3(a,b,c)$

$$(ab)c - a(bc) = \partial m_3(a,b,c) - $$
$$\mp m_3(\partial a, b, c) \mp m_3(a, \partial b, c) \mp \dots$$

А потім, щоб отримати когерентну структуру, треба додати вищі добутки

$$m_n(a_1, a_2, \dots, a_n), \ n \geq 3,$$

які задовольняють системі тотожностей (A_∞ алгебри і A_∞ категорії).

(Сташеф).

За тими ж принципами: L_∞ алгебри (вищі алгебри Лі); вищі Пуасонові алгебри, і т.д.

Загальний (але не досить загальний) контекст: алгебри над операдами. Вищі 2-категорії (зі слідом) з цього контексту випадають. Натомість:

Лур'є / Жуаяль і теорія ∞-категорій, $(\infty, 2)$-категорій, тощо.

Сотні сторінок тексту.

Інші версії: Ляйнстер, ...

Застосування

① Алгебра A – це алгебра диференціальних операторів на многовиді X. За допомогою некомутативного диференціального числення на цьому "просторі" можна узагальнити теорему про індекс, або формулу для кількості розв'язків елиптичного диференціального рівняння (Конн-Москові; Несі-Ц.;...)

(Ідея:

$$\dim(V) = tr(\mathbb{1}_V)$$

для будьякого простору V. Згадаємо, що слід на алгебрі (операторів) A є функціоналом на $A/[A,A]$, тобто на просторі H^0 диференціалу ∂ чи d які ми розглядали вище:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_A & \xrightarrow{\partial} & \Omega^0_A \\ & & \downarrow{\scriptstyle tr} \\ & & k \end{array}$$

Низкою алгебраїчних перетворень за правилами некомутативного диференціального числення можно прийти до теореми про індекс.

$$\mathrm{index}(D) = \int_X ch(\sigma(D)) \cdot Td(T_X)$$

Зліва - (більш-менш) число лінійно незалежних розв'язків рівняння $Df=0$; справа - інтеграл деякої диференціальної форми.

2 "Геометрічна теорія Ленгленда це слід арифметичної теорії Ленгленда" (для поля функцій на кривій над скінченим полем (гейцгорі).

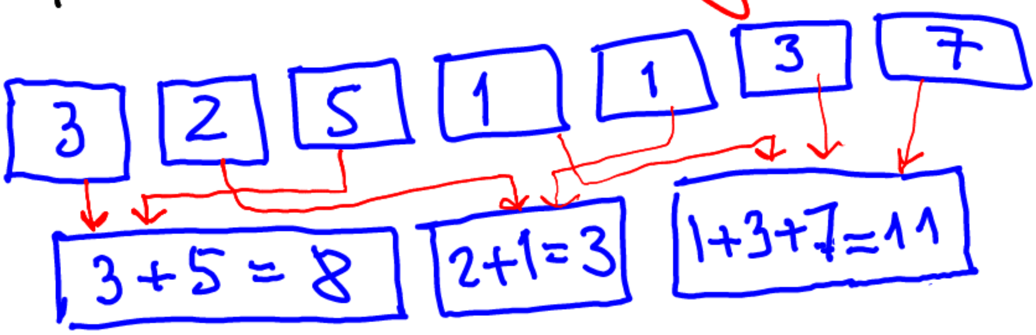
③ Некомутативне диф. числення для $A = \mathbb{Z}$ (цілі числа)

Якщо розглядати $\mathbb{Z}$ як алгебру над $\mathbb{Z}$, то її гомології Гохшильда, і т.д. дуже прості. Але можна її розглядати як алгебру над чимось елементарнішим, тобто: сферічним спектром $\mathbb{S}$.

Що таке $\mathbb{S}$?

Згадаємо ще раз питання: як послабити аксіоми для $\times, +, -$, ...? (вищі структури)

Почнемо з $\pm$. Що можна робити, якщо ми маємо операції $+$ і $-$? Рахувати. Тобто:



(додавати і сортувати)

Тобто: На основі ± виникає новий тип алгебраїчних операцій, які задовольняють аксіомам. Виникає нова алгебраїчна структура, яку можна було б назвати

8)

бухгалтерією

але яка називається

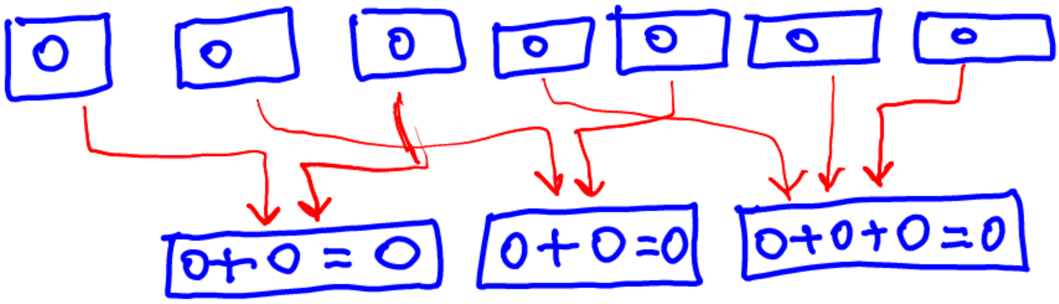
Гамма-множиною.

На її основі будується інша алгебраїчна структура яка називається

Спектром.

Той приклад спектра, який ми бачили вище, занадто складний. (Треба вміти а) додавати і б) сортувати).

Як можна вчитись тільки сортувати? (перший курс бухгалтерії)



Отримуємо інший приклад Г-множини який позначаємо 7)

$$\mathbb{S}$$

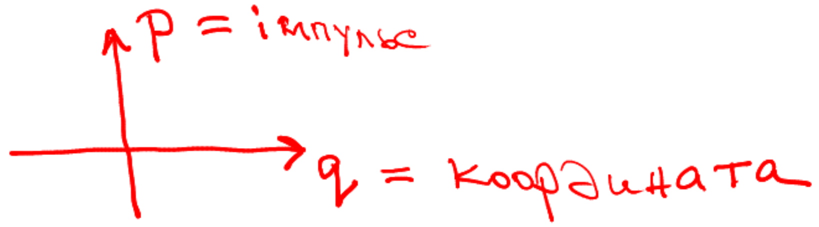
Ідея (Конн, Гесселгольт, Консані):

Розглядати $\mathbb{Z}$ як алгебру над $\mathbb{S}$ методами некомутативного диференціального числення.

(Тоді $\mathbb{Z}$ буде досить складною щоб бути цікавою). 10) 12)

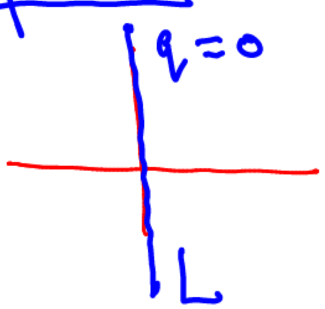
1) „За душу кожної задачі борються янгол геометрії і диявол алгебри" (П. Вайль).

2) Часом ми мусимо розглядати об'єкти, які не точки, а щось більше. В квантовій механіці:

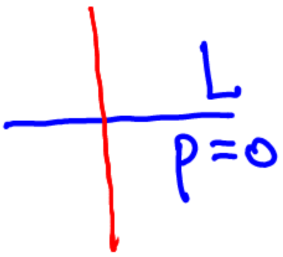


Неможливо знати і p і q одразу. (принцип невизначеності Гейзенбергу).

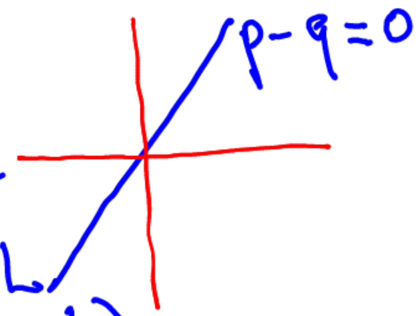
Найменший можливий "об'єкт" — це не <u>точка</u> (наприклад $p=q=0$), а <u>пряма</u> ($q=0$, будьяке p)



або



чи може



(лагранжів підпростір L)

(може, лагранжів підмноговид).

Внутрішні ступені свободи об'єкту

L – це функції на L (≈ лінійний простір станів квантової механіки).

$C(L_1, L_2)$ = лінійні перетворення

$$\mathrm{Func}(L_1) \to \mathrm{Func}(L_2)$$

Часом є досить зручним так думати про кв. механіку і про її аналогію з сучасною симплектичною геометрією (когомологіями Флоера і категоріями Фукая).

(Мікролокальні методи в симплектичній геометрії:

Тамаркін, Б.Ц., Надлер, Заслоу, ...

3) "Жити в суспільстві і бути вільному від суспільства неможливо"
(В.І. Ленін).

..."Но стремиться к этому надо"
(Я, 8-й клас, шк. №173).

4) Все, що є визначеним за допомогою якихось співвідношень, можна (і взагалі краще) розглядати в його похідній версії, яка будується за правилами гомологічної алгебри.

Приклад: від функцій на поверхні $f(x_1,x_2,x_3)=0$ переходимо до похідної версії

$$A \xrightarrow[\partial]{f\cdot} A$$

де $A = k[x_1,x_2,x_3]$ - поліноми 3-х змінних.

Якщо маємо (чистий) перетин двох таких:

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,x_3)=0 \\ g(x_1,x_2,x_3)=0 \end{cases} \qquad (\star)$$

то похідна версія буде:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[dd, equal] & \oplus & A \arrow[dd, equal] \\
 & A \arrow[ur, "-f"'] \arrow[d, equal] & \\
V^{-2} \arrow[r, "\partial"'] & V^{-1} \arrow[r, "\partial"'] & V^{0}
\end{tikzcd}$$

Когомології комплексу $(V^\bullet;\partial)$ в розмірності 0 — це завжди функції на локусі (☆). Він побудований таким чином, що інших когомологій немає. Розглядання цієї похідної версії каже нам щось важливе про (☆) (про його особливості).

5)
$$\iota_\phi (a_0 da_1 \dots da_n) =$$
$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \Big[d\phi(a_{k+1}) \dots d\phi(a_n) \cdot a_0 da_1 \dots da_{k-1} \cdot a_k$$
$$- \phi(a_k)\, d\phi(a_{k+1}) \dots d\phi(a_n) \cdot a_0 da_1 \dots da_{k-1} \Big]$$

Коли $\phi = 1$, маємо
$$\iota_{\Delta_1} (a_0 da_1 \dots da_n) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \Big[a_k, da_{k+1} \dots da_n \cdot a_0 \cdot da_1 \dots da_{k-1} \Big]$$

(диференціал Гінзбурга і Шедлера).

6) Молодий видатний європейський математик почав свої лекції з того, що намалював на дошці:

Алгебра Геометрія Топологія	$\rightarrow$	Диференційні градуйовані категорії

Потім поговорив кілька хвилин, зробив жест рукою і казав: Кінцева мета – це позбавитися від лівої частини.

(реакція одного з слухачів: "Молодёжь... не задушишь, не убьёшь". *)

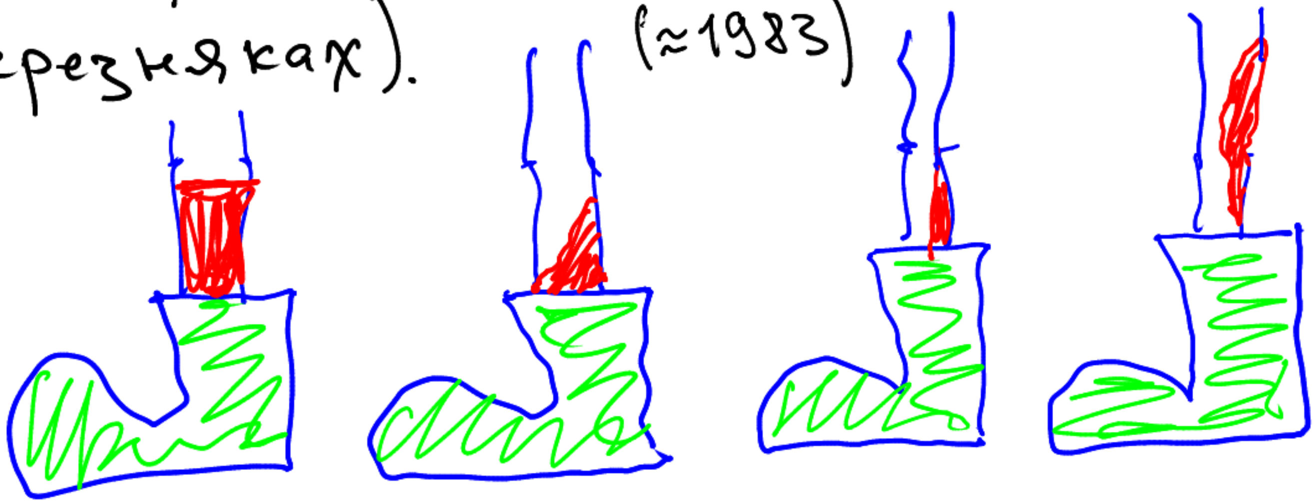
*) (Цитата з комсомольської пісні)

7) "Як це може бути, що тут виконується $ab = ba$?! Це як зняти шкарпетки, не знімаючи чоботів!"

– "Так. Але топологічно, або з точністю до гомотопії, це можлив

(З розмови з Ю.Л. Далецьким, тоді мої м

соавтором, під час прогулянки на Березняках). (≈1983)



8) Мій дід багато років працював бухгалтером в Києві, десь біля Повітрофлотського мосту. Моя матір в 60 років перекваліфікувалася з викладача фармакології в КМУ-2 на бухгалтера в Брукліні. Моя дочка спочатку думала, що бабина робота — це стояти посередині офісу і тримати книги.

9) Лінійний простір — це множина, елементи якої можна складати, віднімати, і множити на числа так, що для цих операцій виконується деякий лист аксіом. Алгебра — це лінійний простір, елементи якого можна ще й множити (і для цієї операції виконується ще декілька аксіом).

Приклади алгебр: числа; функції

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x); \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Лінійні перетворення $A: V \to V$ де V — лінійний простір

$$(A+B)v = Av + Bv; \quad (AB)v = A(Bv).$$

(Головні) приклади лінійних просторів:

n-ки чисел $(x_1, \ldots, x_n)$

Різноманітні простори функцій.

10) Ларс Гесселгольт:

Вальдгаузен змінив те, як люди РАХУВАЛИ протягом щонайменше тридцяти п'яти тисяч років

(тобто перейшов від $\mathbb{Z}$ до $\mathbb{S}$).

11) "Рішуче відмовляюся знати будьщо, що ти мені можеш пояснити на прикладі дійсної прямої!" (З розмови з видатним європейським топологом).

13) Послаблена форма $(ab)c = a(bc)$ — це не те ж саме, що послаблена форма $2\times2=4$?

Ні, не те ж саме.

12) Ситуація з вищими категоріями трохи нагадує те, що ми спостерігаємо в нашому сучасному житті. Правила, які існували сторіччями, такі, як $(ab)c = a(bc)$, проголошуються необов'язковими. На мою думку, бенефіти від цього очевидні. Але чи це означає, що усе стає дозволеним?

В математиці ми бачимо, як пишуться тисячі сторінок, щоб сформулювати нові послідовні правила на заміну старим. Щодо життя, я не впевнений

Література

Циклічні гомології:

J. L. Loday, Cyclic Homology

R. Nest, B. Tsygan, Book in Progress

A. Connes, Noncommutative Geometry

Ginzburg, Schedler

ДГ категорії:

V. Drinfeld; B. Keller;

M. Kontsevich, Y. Soibelman (articles)

ДГ категорії як 2-категорія:

D. Tamarkin, What do dg categories form?

B. Tsygan, NC calculus and operads, 2012; Любашенко, Манзюк

B. Keller, DG categs...;

Toën, Vaquié; 2 papers by B. Shoikhet; G. Faonte;

Lurie's book.

A_∞ категорії:

M. Kontsevich, Y. Soibelman;
B. Keller

Вищі категорії:

J. Lurie, Higher Topos Theory
Higher Algebra

V. Hinich, 10 lectures at Weitzmann Inst., on his home page.

Спектри:

$\begin{cases} \text{Schwede} \\ \text{Hovey, Schwede, Shipley Symm. Spectra} \end{cases}$

M. Boyarchenko, Notes for Geom. Langlands Seminar, UChicago (on their site)

Сліди: D. Kaledin, Trace functors and localization; cyclic homology w/coefficients;...

Gaitsgory: Geom. Langlands is trace of arithm. Langlands, OR: How to reinvent shtukas.

Gaitsgory, Rosenblum, book.

D. Nadler

R. Wei, thesis;

R. Wei, B. Tsygan, to appear.

Про $\mathbb{Z}$ як алгебру над $\mathbb{S}$:

L. Hesselholt, Per. THC and Hasse-Weil Zeta Function.

про індекс:

A. Connes, H. Moscovici, Local index formula;

A. Connes, NCG Book;

N. Higson, Notes on local index formula;

R. Nest, B. Tsygan, Alg. index thm for families;

P. Bressler, R. Nest, B. Tsygan,
RR thm for $\mathcal{D}$-modules;
D. Gaitsgory, Video of lectures at
Hausdorff Center, Bonn.

(Ко)ланцюги Гохшільда

A дга над k; $1 \in k$, ком.

$$\partial_A : A^{\bullet} \to A^{\bullet+1}$$

$$A^{\bullet}[1] = A^{\bullet+1}$$

Коли A - просто алгебра, $A[+1]$ зосереджена в розмірності -1.

$$\mathrm{Bar}(A) = \bigoplus_{n \geq 1} A[1]^{\otimes n}$$

(ко)вільна <u>коалгебра</u> з (ко)твірними $A[1]$.

Кодиференціювання

$$\partial : \mathrm{Bar}(A) \to \mathrm{Bar}(A)^{\text{степ.}+1}$$

Визначене тим, що:

$$\bigoplus A[1]^{\otimes n} \longrightarrow \bigoplus A[1]^{\otimes n} \xrightarrow{\text{proj}} A[1]$$

$$(a_1|\ldots|a_n) \longmapsto \begin{cases} (-1)^{|a_1|} a_1 a_2, & n=2 \\ \partial_A a_1, & n=1 \\ 0, & n>2 \end{cases}$$

$$\partial = \partial_A + \partial_{Bar}$$

$$\partial^2 = 0$$

Узагальнення: $m_n : A[+1]^{\otimes n} \to A[1]$ степені 1

(тобто $A^{\otimes n} \to A$ степені $n-2$)

Кодиференціювання, визначене тим, що $(a_1|\dots|a_n) \longmapsto m_n(a_1,\dots,a_n)$, $n>0$

Якщо $\partial^2 = 0$,

отримуємо A_∞ алгебру.

Маємо

$Bar : dg\text{-}Alg \longrightarrow dg\text{-}Coalg$

і дуально:

$Cobar : dg\text{-}Alg \longleftarrow dg\text{-}Coalg$

Дг коалгебра $C \rightsquigarrow$

$$Cobar(C) = \prod_{n\geq 1} C[-1]^{\otimes n}$$

Якщо

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i''$$

$$\partial : (c) \longmapsto (\partial_C c) + \sum_i (-1)^{c_i'} (c_i') \cdot (c_i'')$$

розповсюджується до диференціювання степеню 1

$$\partial^2 = 0$$

1) $Cobar(Bar(A)) \xrightarrow{\sim} A$

На твірних:

$(a_1|\ldots|a_n) \longmapsto a_1, \ n=1; \ 0, \ n>1.$

Дуально:

2) $C \xrightarrow{\sim} Bar(Cobar(C))$

1) – морфізм ДГ алгебр

2) – морфізм ДГ коалгебр

Квазі-ізоморфізми. (припущення: C конільпотентна)

Для dg (ко)категорій:

$\mathrm{Bar}\,A^{\cdot}$ – кокатегорія; $\mathrm{Ob} = \mathrm{Ob}(A)$

$$\mathrm{Bar}(A)(x,y) = \bigoplus_{\substack{n \geq 0 \\ x_1,\dots,x_n \in \mathrm{Ob}(A)}} A^{\cdot}(x,x_1)[1] \otimes A^{\cdot}(x_1,x_2)[1] \otimes \dots \otimes A^{\cdot}(x_n,y)[1]$$

$$\mathrm{Cobar}(C)(x,y) = \prod_{\substack{n \geq 0 \\ x_1,\dots,x_n \in \mathrm{Ob}(A)}} C(x,x_1)[-1] \otimes \dots \otimes C(x_n,y)[-1]$$

$$\mathrm{Bar} : dg\text{-}\mathrm{Cat} \rightleftarrows dg\text{-}\mathrm{Cocat}_{\mathrm{conilp}} : \mathrm{Cobar}$$

(Ко)ланцюги Гохшільда dg категорій.

$$\mathrm{Bar}_+(A) := k \oplus \mathrm{Bar}(A)$$

$$\mathrm{Cobar}^+(A) := k \oplus \mathrm{Cobar}(A)$$

$M^\bullet$ ДГ бімодуль над A

$$C^\bullet(A,M) = \prod_{n\geq 0} \underline{\mathrm{Hom}}_k^\bullet(A[1]^{\otimes n}, M)$$

$$(\delta\varphi)(a_1,\dots,a_{n+1}) = \pm a_1\varphi(a_2,\dots,a_{n+1})$$

$$+\sum_j \pm\varphi(a_1,\dots,a_j a_{j+1},\dots) \pm \varphi(a_1,\dots,a_n)a_{n+1}$$

$$+\sum \pm\varphi(a_1,\dots,\partial_A a_j,\dots,a_n) +$$

$$+\partial_M \varphi(a_1,\dots,a_n)$$

Як знайти цю формулу?

$$C^\bullet(A,A) = \mathrm{CoderBar}(A)$$

$$\varphi_n : A[1]^{\otimes n} \to A \mid n\geq 0$$

$$\updownarrow$$

єдине кодиференціювання, для

якого

$$\mathrm{Bar}(A) \longrightarrow \mathrm{Bar}(A) \xrightarrow{\mathrm{proj}} A[1]$$

$$(a_1|\ldots|a_n) \longmapsto \varphi_n(a_1,\ldots,a_n)$$

$$\forall n$$

Скобка Герстенхабера:

$$\varphi\circ\psi \mp \psi\circ\varphi$$

на $\mathrm{Coder}(\mathrm{Bar}(A))$

$$m_2(a_1,a_2) := (-1)^{|a_1|} a_1 a_2$$

$$m_1(a_1) := \partial a_1$$

$$m = m_1 + m_2$$

$$\delta = [m, -]$$

Ті ж самі формули для загального M.

$$\varphi : A[1]^{\otimes n} \to A$$

$$\psi : A[1]^{\otimes m} \to A$$

$$\varphi\{\psi\}(a_1, \dots, a_{n+m-1}) =$$

$$= \sum \pm \varphi\big(a_1, \dots, \psi(a_{j+1}, \dots, a_{j+m}), \dots\big)$$

$$[\varphi, \psi] = \varphi\{\psi\} - (-1)^{(|\varphi|-1)(|\psi|-1)} \psi\{\varphi\}$$

$$=$$

ДГ алгебра Ли

$$C^{\bullet+1}(A,A),\ \delta,\ [\,,\,]$$

$$=$$

Ланцюги Гохшільда:

$$C_\bullet(A, M) = \bigoplus_{n\geqslant 0} M \otimes A[1]^{\otimes n}$$

$$b(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \pm a_0\otimes\ldots\otimes a_j a_{j+1}\otimes\ldots\otimes a_n$$

$$\pm a_n a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1} + \partial_M a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \pm a_0\otimes\ldots\otimes \partial_A a_j\otimes\ldots\otimes a_n$$

Для ДГ категорій:

Бімодуль над A: Комплекси

$M(x,y)$,

$$C^\bullet(A, M)$$

$$\shortparallel$$

$$\prod_{\substack{n\geqslant 0\\ x_0,\ldots,x_{n+1}\in \mathrm{Ob}(A)}} \mathrm{Hom}\Big(A(x_0,x_1)[1]\otimes\ldots\otimes A(x_n,x_{n+1})[1],\ M(x_0,x_{n+1})\Big)$$

Щодо ланцюгів:

$$C_\bullet(A, M) = \bigoplus_{\substack{n \geq 0 \\ x_0, \dots, x_n}} M(x_0, x_1) \otimes A(x_1, x_2)[1] \otimes \dots \otimes A(x_n, x_0)[1]$$

<u>Зручніше</u>: замість $A(x,y)[1]$

$\bar{A}(x,y)[1]$, де

$$\bar{A}(x,y) = \begin{cases} A(x,y), & x \neq y \\ A(x,x)/k \cdot 1_x, & x = y \end{cases}$$

(<u>нормалізовані</u> (ко)ланцюги).

Формули для диференціалів

$\delta : C^\bullet \to C^{\bullet+1}$ і $C_\bullet \xrightarrow{b} C_{\bullet-1}$

такі ж самі.

Завжди:

$$C_p := C^{-p}$$

Для звичайної алгебри A: 10

$$M \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\bar{A}, M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\bar{A}^{\otimes 2}, M) \to$$

$$m \longmapsto [\_, m]$$

$$\varphi : \bar{A} \to M \longmapsto (\delta\varphi)(a_1, a_2) =$$

$$= a_1\varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1)a_2$$

$$HH^0(A, M) = \mathrm{Center}(M) = \{m \mid am = ma, \forall a\}$$

$$HH^1(A, M) = \mathrm{Der}(A, M) / \mathrm{Der}_{in}(A, M)$$

також:

$HH^2(A, M) = \{$класи ізоморфізму деформацій A за допомогою ідеалу квадрата нуль, який $\cong M$ як A-бімодуль$\}$

(Добуток на $A \dotplus M$:

$$(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) = a_1 a_2 + (a_1 m_2 + m_1 a_2 + \varphi(a_1, a_2)))$$

Ланцюги:

$$\longrightarrow M\otimes A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} M\otimes A \xrightarrow{b} M$$

$m\otimes a \mapsto ma - am$

$$HH_0(A,M) = M/[A,M]$$

ДГ категорії $C^\bullet(A,B)$

Об'єкти: $f: A \to B$

(насправді: A_∞ функтори)

$$C^\bullet(A,B)(f,g) = C^\bullet(A, {}_fB_g)$$

$${}_fB_g = B;\quad a_1\cdot b\cdot a_2 = f(a_1)\,b\,g(a_2)$$

Композиція:

$$C^\bullet(A,{}_fB_g)\otimes C^\bullet(A,{}_gB_h)\to C^\bullet(A,{}_fB_h)$$

$\varphi: A^{\otimes n}\longrightarrow B \qquad \psi: A^{\otimes m}\longrightarrow B$

$$(\varphi\cup\psi)(a_1,\dots,a_{n+m}) = \pm\varphi(a_1,\dots,a_n)\,\psi(a_{n+1},\dots,a_{n+m})$$

Зауваження.

A_∞ морфізм дга $A^\bullet \to B^\bullet$:

$Bar(A^\bullet) \to Bar(B^\bullet)$ морфізм дг коалг.

Або:

$$f \in C^\bullet(A,B) \qquad \delta f + f \cup f = 0$$

$f_n : A^{\otimes n} \to B$, $n \geq 1$, задовольняє тотожностям...

A_∞ <u>функтор</u> $A^\bullet \to B^\bullet$: $f : Ob(A) \to Ob(B)$

$$f_n : A(x_0, x_1) \otimes \ldots \otimes A(x_{n-1}, x_n) \to B(fx_0, fx_n)$$

ті ж самі тотожності.

(Або: дг (ко?) функтор

$$Bar(A) \longrightarrow Bar(B)).$$

3

Про гомотопічну алгебру дг категорій

(техніка, яка дозволяє:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d] \\ A \end{tikzcd} \quad R \text{ — резольвента}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, dashed, bend left, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & S \arrow[ll, dashed, "\sim"'] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad \ldots$$

(для двох резольвент)

Випадок ДГ алгебр: (Квіллен)

Розшарування: $A \twoheadrightarrow B$ (сюр'єктивні)

"$\twoheadrightarrow$"

Слабкі еквівалентності: $A \xrightarrow{\sim} B$ (квазі-ізоморфізми)

"$\xrightarrow{\sim}$"

Корозшарування:

"$\rightarrowtail$"

$$\forall \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & A_1 \arrow[d, two heads, "\wr"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & B_1 \end{tikzcd}$$

Властивість підйому зліва

Більш конструктивно:
Елементарний крок - додати декілька нових <u>вільних</u> змінних, диференціали яких:

$$dx^{\text{нові}} \subset A\langle x^{\text{попередні}}\rangle$$

Корозшарування: отримати B з A за допомогою елементарних кроків; будьякий $\boxed{\text{ретракт}}$ такого,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, bend left] & B \arrow[d, bend left] \\ A' \arrow[r] \arrow[u, bend left] & B' \arrow[u, bend left] \end{tikzcd} \quad \Big| \; \circlearrowright = \mathrm{id}$$

<u>Для ДГ категорій</u>: було б те ж саме, якби усі вони мали ті ж самі об'єкти, і f було б тотожністю (чи біекцією) на об'єктах.

Гомотопічна категорія $H^0(A)$ (чи $Ho(A)$)

$$H^0(A)(x,y) := H^0(A^\bullet(x,y))$$

$\simeq$

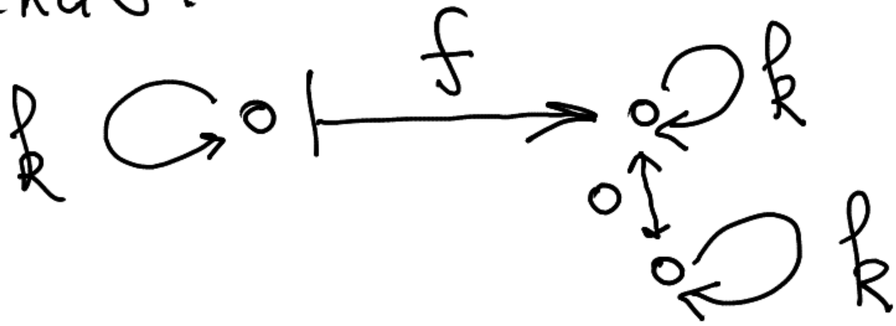
Розшарування: $f: A^\bullet \to B^\bullet$

1) $A^\bullet(x,y) \twoheadrightarrow B^\bullet(fx,fy)$

2)
$$\begin{tikzcd}
\overset{x}{\circ} \arrow[r, mapsto] & \overset{f(x)}{\circ} \\
\exists\ \underset{y}{\circ} \arrow[u, "\wr \text{ в } H^0(A^\bullet)"'] \arrow[r, mapsto] & Z \arrow[u, "\wr \text{ в } H^0(B^\bullet)"']
\end{tikzcd}$$

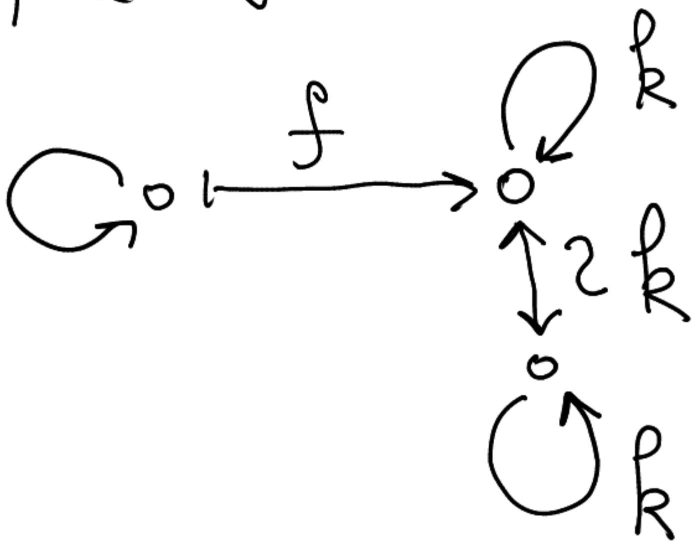
Приклад:

1



Контрприклад:

2



Слабкі еквівалентності:

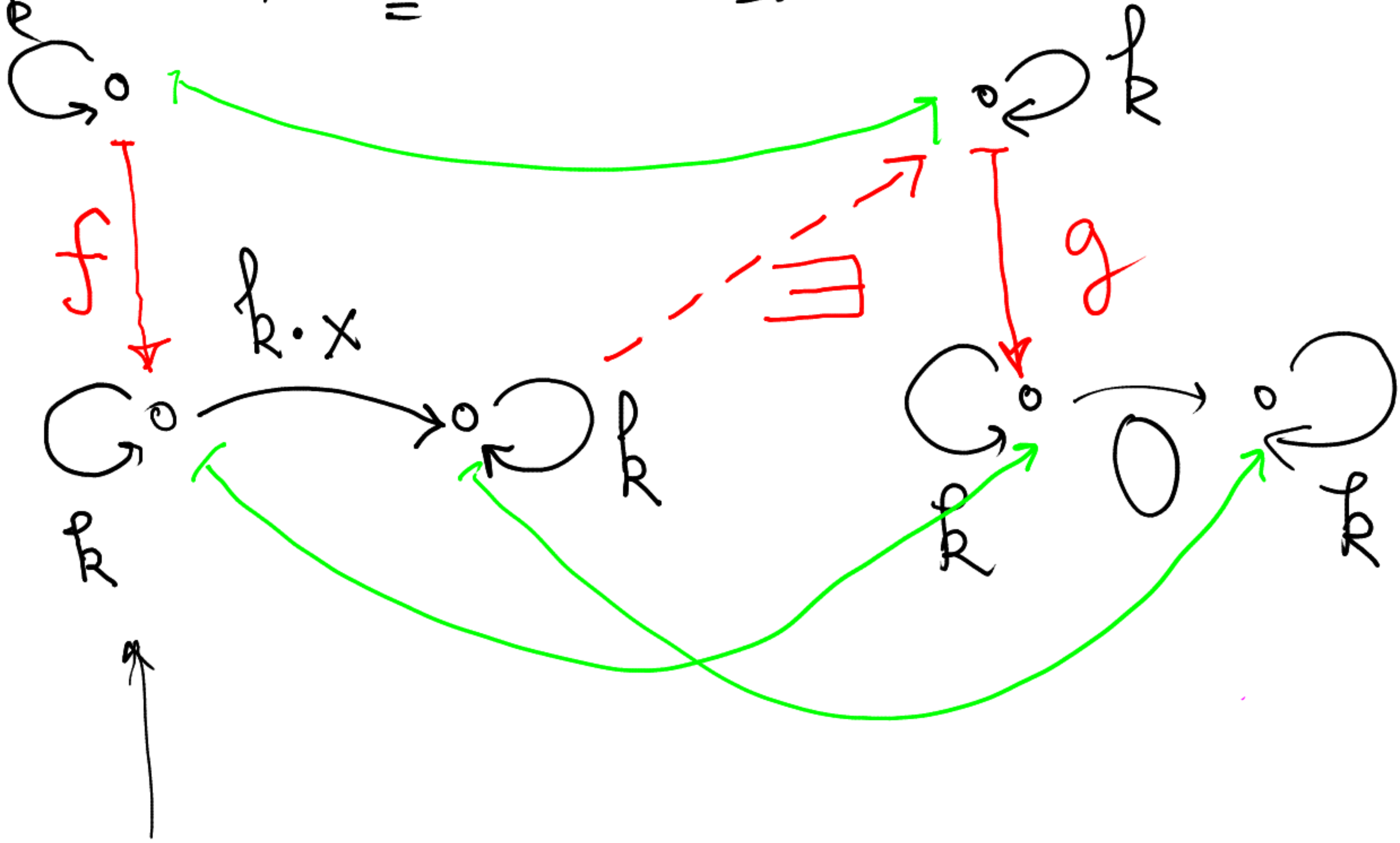
1) $A^\circ(x,y) \xrightarrow[\text{quis}]{\sim} B^\circ(fx,fy)$

2)
$$\begin{array}{ccc} Ob(H^0(A)) & \xrightarrow{f} & Ob(H^0(B)) \\ \| & & \| \\ Ob(A) & & Ob(B) \end{array}$$

істотно сюр'єктивний

приклад: 2 контрприклад: 1

Приклад. Якщо було б розшару-ванням і сл.екв.:



f не було б корозшару-ванням.

Корозшарування: визначене властивістю підйому зліва для

Теорема (Табуада). $DGCat$ — замкнена модельна категорія.

<u>Вправа</u>

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop right, "k"] \arrow[d, "f"] & \\ \circ \arrow[loop left, "k"] \arrow[r, "k\cdot x"] & \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd}$$

— це корозшарування.

Так саме як

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop right, "k"] \arrow[d] & \\ \circ \arrow[loop left, "k"] \arrow[r, leftrightarrow, "0"'] & \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd}$$

<u>Вправа</u>. Якщо $f: \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\to$, то:

$f: \mathrm{Ob}\,A \twoheadrightarrow \mathrm{Ob}\,B$; $Z^n A(x,y) \twoheadrightarrow Z^n B(fx, fy)$

ДГ категорія шляхів:

$$A^{\Delta^1} = A * \underbrace{C^\bullet(\Delta^1)}_{\text{коланцюги},\ \cup}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \arrow[d, "d"'] & 0 \\ \mathbb{Z}\varepsilon & 1 \end{tikzcd}$$

$e_0^2 = e_0$
$e_1^2 = e_1$
$e_0 e_1 = e_1 e_0 = 0$
$e_0 \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon e_1$
$\varepsilon e_0 = 0 = e_1 \varepsilon$

Тепер маємо можливість говорити про гомотопні дг функтори:

$$A \to B^{\Delta^1} \overset{ev_0}{\underset{ev_1}{\rightrightarrows}} B$$

І про резольвенти:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "\wr"] \\ A_0 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & A \end{tikzcd}$$

Дві резольвенти є гомотопічно еквівалентними, тощо.

Якщо я вірно розумію: dgCat — не те, що називається симпліціальною модельною категорією.

Поки що маємо:

Дг категорії A, B

$\rightsquigarrow$

Дг категорія $C^\bullet(A,B)$

Хотіли б:

$$C^\bullet(A,B) \otimes C^\bullet(B,C) \to C^\bullet(A,C)$$

dg функтор, асоціативний...

Насправді маємо A_∞ функтор...

Могли б шукати якихось вищих співвідношень асоціативності для цих A_∞ функторів, ... Але ми обираємо дещо інший шлях.

Операції brace і морфізм

$$\mathrm{Bar}\,C(A,B)\otimes \mathrm{Bar}\,C(B,C)\to$$
$$\to \mathrm{Bar}\,C(A,C)$$

1. "Некомутативні диференціальні оператори" на лінійному просторі.

V — (градуйований) лінійний простір. $T(V)=\bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$

0) Кожне лінійне відображ.

$D: V\to V \rightsquigarrow$ диференціювання

$$\mathrm{Op}(D): T(V)\to T(V)$$

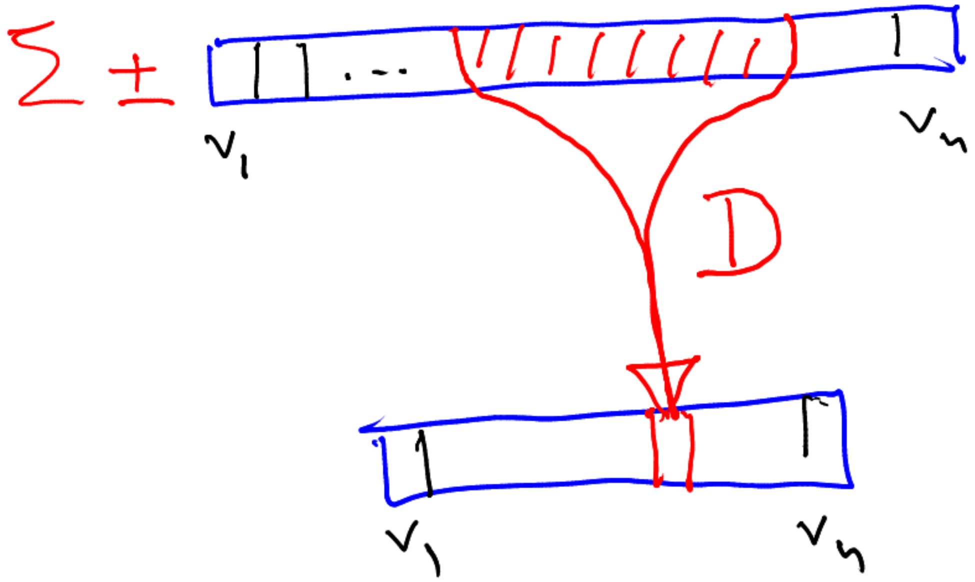
$$v_1\ldots v_n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \pm v_1\ldots D(v_k)\ldots v_n$$

1) Кожне мультілінійне

$D: V^{\otimes l}\to V$

$$Op(D): T(V) \to T(V)$$

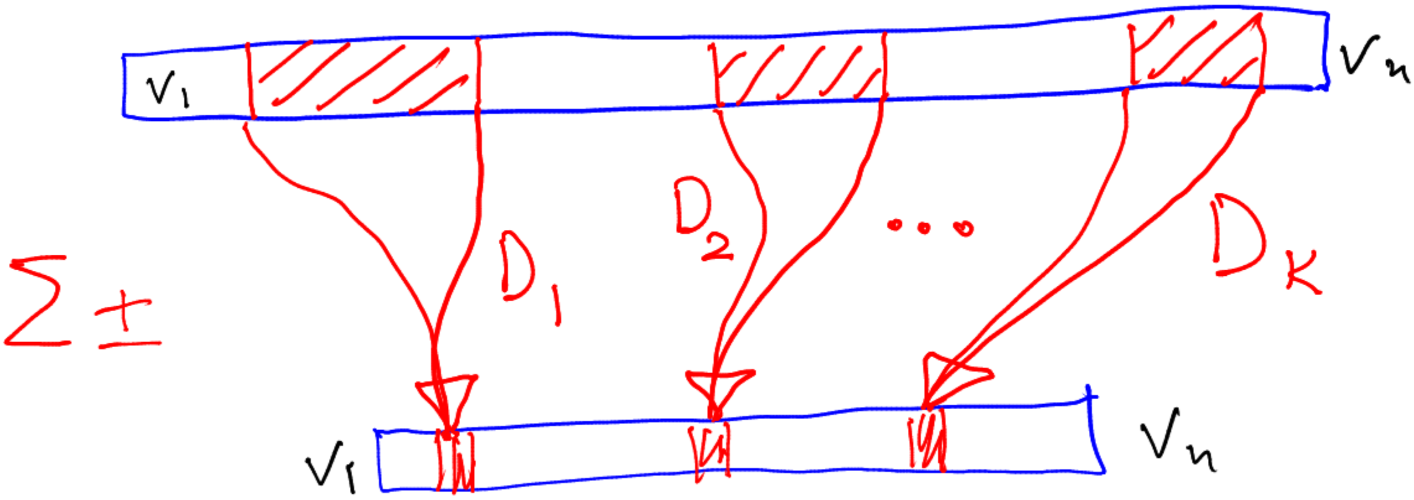
$$v_1 \dots v_n \mapsto \sum_{j=0}^{n-l} \pm\, v_1 \dots D(v_{j+1}, \dots, v_{j+l}) \dots v_n$$



Більш того, <u>декілька</u>

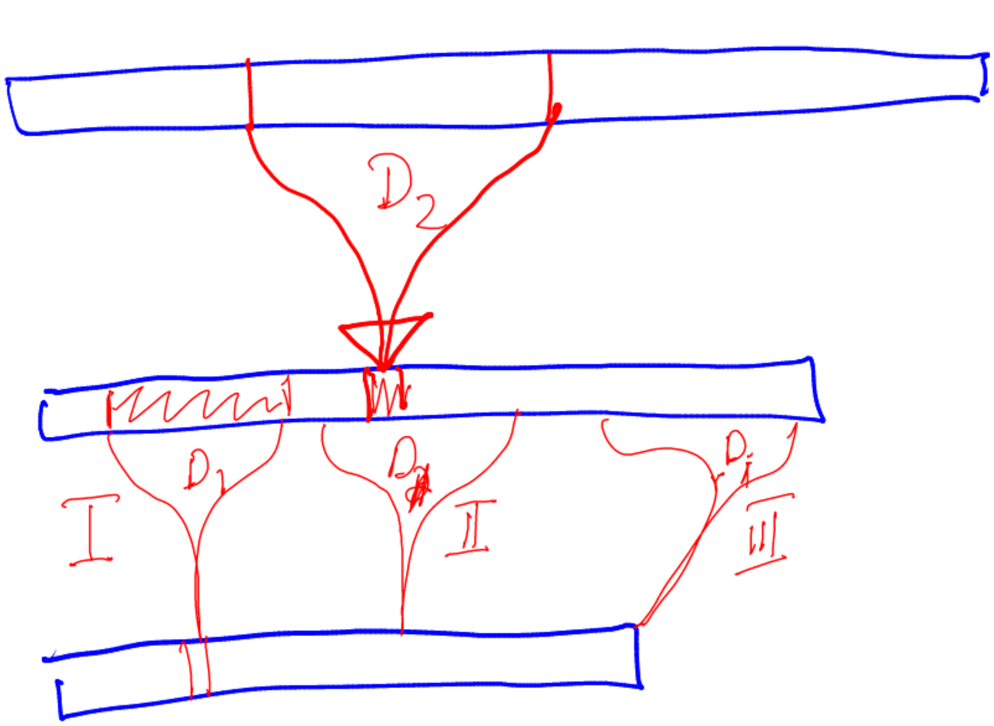
$$D_k : V^{\otimes l_k} \to V, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$Op(D_1, \dots, D_k): TV \to TV$$



Лінійна оболонка таких операторів $T(V) \supset$ замкнена відносно композиції:

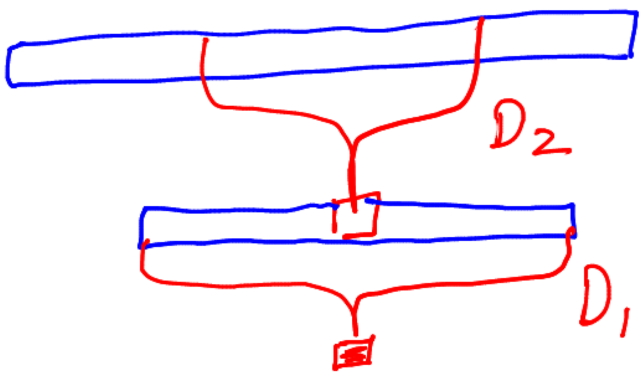
$$Op(D_1) \circ Op(D_2) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$



$$\mathrm{I} = \pm Op(D_1, D_2) \qquad \mathrm{II} = \pm Op(D_2, D_1)$$

$$\mathrm{III} = \pm Op(D_1\{D_2\})$$

$D_1\{D_2\}$:



$D_1 : V^{\otimes n_1} \to V \qquad D_2 : V^{\otimes n_2} \to V$

$$D_1 \circ D_2 : V^{\otimes (n_1 + n_2 - 1)} \to V$$

Маємо асоціативну алгебру

$$\mathrm{Tens}^*(\mathrm{Hom}(V^{\otimes \bullet}, V)) \quad (\star)$$

$$* > 0 \ ; \ \bullet \geq 0$$

Ця алгебра діє на $T(V)$ "Н.К. диф. операторами".

Тепер:

$$V = A[1]$$

$$\mathrm{Hom}(A[1]^{\otimes \bullet}, A[1]) = C^\bullet(A, A)[1]$$

$$(*) = \mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)$$

$$=$$

$$(\varphi_1|\dots|\varphi_n)\bullet(\psi_1|\dots|\psi_m) =$$

$$= (\varphi_1|\dots|\varphi_{n_1}|\dots|\dots|\varphi_\cdot|\dots|\dots|\varphi_\cdot|\dots|\varphi_\cdot\dots)$$

$$\sum \pm (\varphi_1|\dots|\psi_1|\varphi_\cdot|\dots|\psi_2|\dots|\psi_m|\dots)$$

$$= \sum \pm (\varphi_1|\dots|\psi_1\{\varphi_{i_1+1},\dots\}|\dots|\psi_2\{\varphi_{i_2+1},\dots\}|\dots)$$

(Getzler–Jones; Gerstenhaber–Voronov) '94

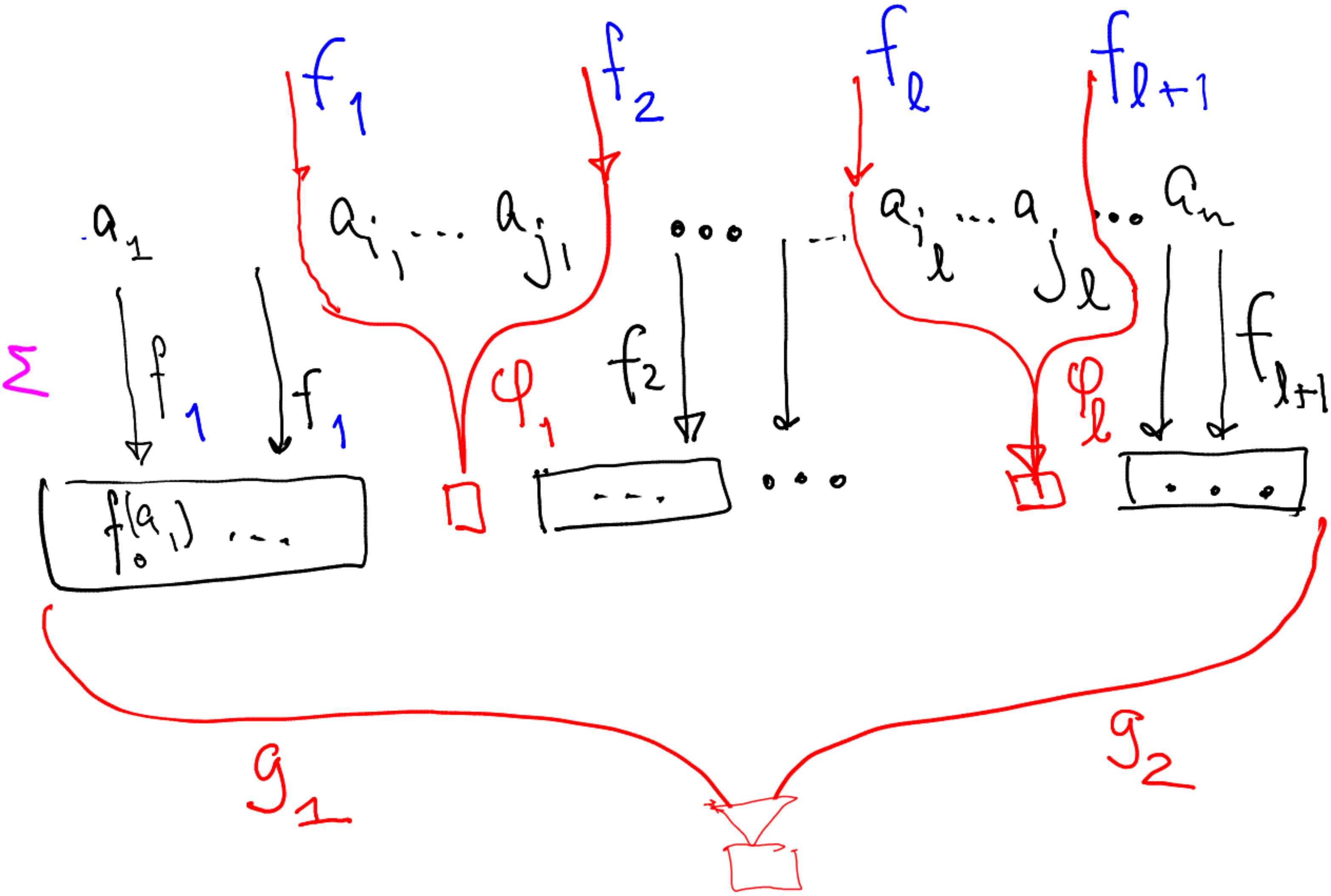
Факт: це морфізм ДГ коалгебр

$$\mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)^{\otimes 2} \to \mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)$$

$$\boxed{(\Phi\bullet\Psi)\bullet\Theta = \Phi\bullet(\Psi\bullet\Theta)}$$

Для ДГ категорій:

$\psi\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$:

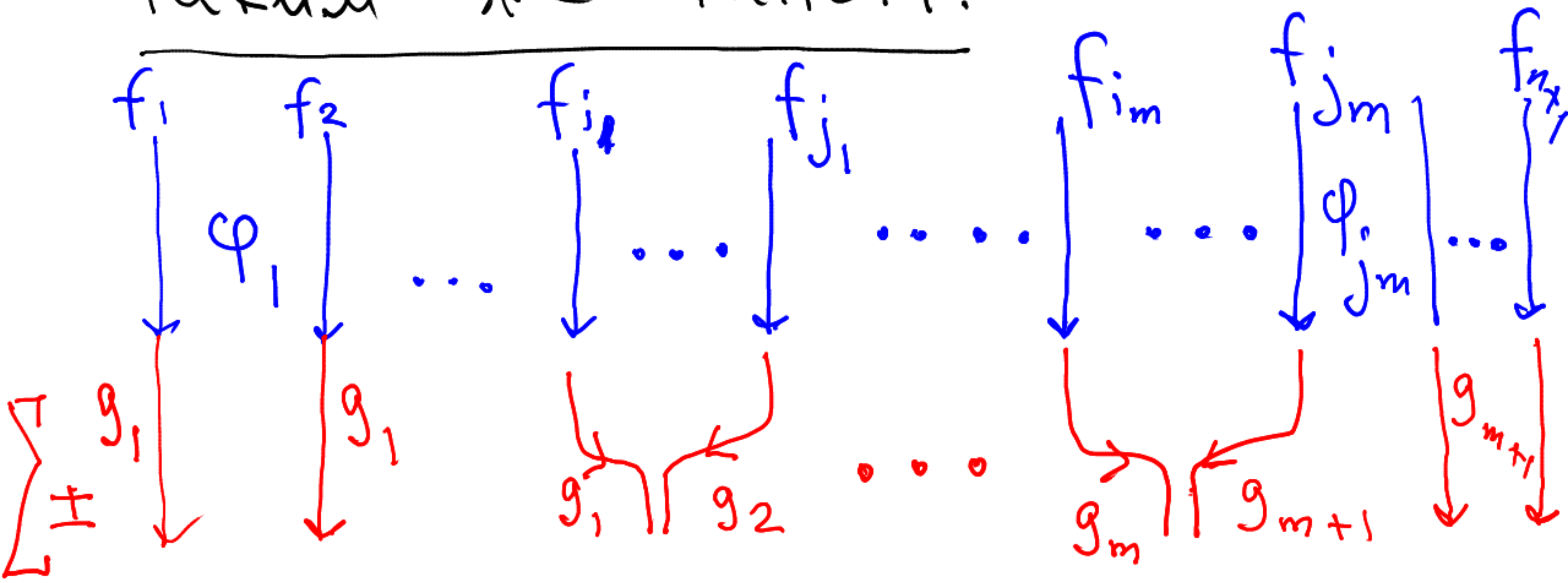


$\varphi_1 \in C^{\bullet}(A_{f_1}, B_{f_2}) \dots \varphi_l \in C^{\bullet}(A_{f_l}, B_{f_{l+1}})$,

$\psi \in C^{\bullet}(B_{g_1}, C_{g_2})$

$\psi\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\} \in C^{\bullet}(A_{g_1 f_1}, C_{g_2 f_{l+1}})$

Таким же чином:



$$\left(g_1\circ\varphi_1 \,\middle|\, g_1\circ\varphi_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \psi_1\{\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{j_1}\} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \psi_m\{\varphi_{i_m},\dots,\varphi_{j_m}\} \,\middle|\, \dots\, g_{m+1}\circ\varphi_n\right)$$

$$\mathrm{Bar}\, C^\bullet(A,B)(f_1, f_{n+1})$$

$$\otimes$$

$$\mathrm{Bar}\, C^\bullet(B,C)(g_1, g_{m+1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Bar}\, C^\bullet(A,C)(g_1 f_1, g_{m+1} f_{n+1})$$

Морфізм ДГ кокатегорій

Висновок:

$$\mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,B) \otimes \mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(B,C)$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,C)$$

$$\mathrm{Bar}(A) \otimes \mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,B)$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Bar}(B)$$

Морфізми $\underleftrightarrow{A}\Gamma$ кокатег.; все асоціативне.

∞-категорії

① Квазі-категорії

Маємо <u>справжню</u> категорію C:

$$N_n C = \{ i_0 \to i_1 \to \dots \to i_n \}$$
$$i_0, \dots \in Ob(C)$$

$$\begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, shift left=4, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] \arrow[d, shift right=4, "d_2"'] \\ N_1 C \arrow[u, bend left=40, "s_0"] \arrow[u, bend right=40, "s_1"'] \arrow[d, shift left=2, "d_0"] \arrow[d, shift right=2, "d_1"'] \\ N_0 C \arrow[u, bend left=40, "s_0"] \end{tikzcd}$$

симпліціальне множина.

<u>Або</u>: $[n]_\Delta = \{0 \to 1 \to \dots \to n\}$

$$N_n C = \mathrm{Funct}([n]_\Delta, C)$$

Δ : об'єкти $[n]$, $n \geq 0$

$[n] \to [m]$: $\mathrm{Funct}([n]_\Delta, [m]_\Delta)$

$N_\bullet C$ — сімпліціальна множина,

або

$$N_\bullet C : \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$\Delta^n := N[n]_\Delta$$

$\Lambda^n_i = \partial\Delta^n$ без 

$\partial_i \Delta^n$

(формальне визначення: ...)

$N_\bullet C$ задовольняє:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & X_\bullet \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd} \qquad \boxed{0 < i < n}$$

Такі $X_\bullet$ – <u>квазікатегорії</u> (Joyal). Це один з підходів до ∞- (або $(\infty,1)$) – категорій.

Якщо ☆ виконується для будь-якого $0 \le i \le n$, то $X_\circ$ – комплекс <u>Кана</u>. Якщо C – групоїд, то $N_\circ C$ – комплекс Кана.

② <u>Симпліціальні категорії.</u>

Категорії, збагачені симпліц. множинами, тобто:

Об'єкти: $x, y, \ldots$

$C_\circ(x,y)$ – Δ°-множ.;

$$C_\circ(x,y)\times C_\circ(y,z)\to C_\circ(x,z)$$

асоц.; $1_x\in C_\circ(x,x)$; ...

ꞓ

Друге визначення $(\infty,1)$-кат.:

$C_\circ$ де усі $C_\circ(x,y)$ – комплекси Кана.

ꞓ

3 Категорії Сігала

Ідея. Категорія з множ. об'єктів $\mathcal{Q}$:

Кожному символу $A_0\to\ldots\to A_n$ множина $\{A_0\xrightarrow{f_1}\ldots\xrightarrow{f_n}A_n\}^{A_j\in\mathcal{Q}}$ –

$\Delta_{\mathcal{Q}}$: об'єкти: $([n]; A_0\to\ldots\to A_n)$

Тобто: $[n]_\Delta$; $[n] \to Q$

$\left([n] := \operatorname{ob}([n]_\Delta) = \{0, 1, \dots, n\} \right)$

Кожний функтор

$$[n]_\Delta \xrightarrow{f} [m]_\Delta \qquad f \in \Delta([n],[m]):$$

$$\{[n] \to Q\} \xleftarrow[f^*]{} \{[m] \to Q\}$$

Об'єкти в Δ_Q:

$$[n]_\Delta \;;\; \alpha : [n] \to Q$$

Морфізми в Δ_Q:

$$([n]_\Delta ; \alpha) \to ([m]_\Delta ; \beta) -$$

це пара

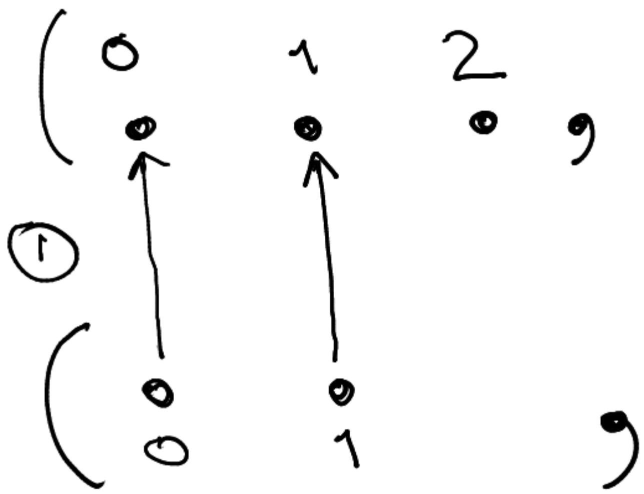
$[n]_\Delta \xrightarrow[f]{} [m]_\Delta$, така що $f^*\beta = \alpha$.

Приклад

$$[2]_\Delta ;\ A_0 \to A_1 \to A_2$$

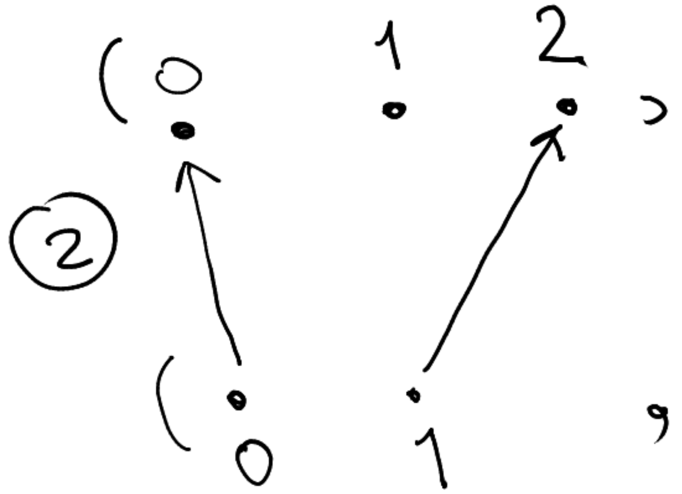
$$\uparrow$$

$$[1]_\Delta ;\ B_0 \to B_1$$



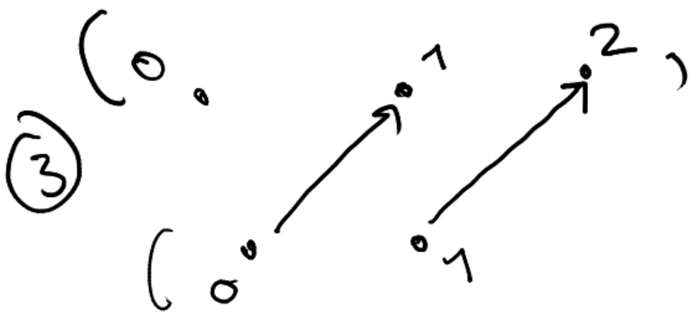
$$A_0 \to A_1 \to A_2)$$

$$A_0 \to A_1)$$



$$A_0 \to A_1 \to A_2)$$

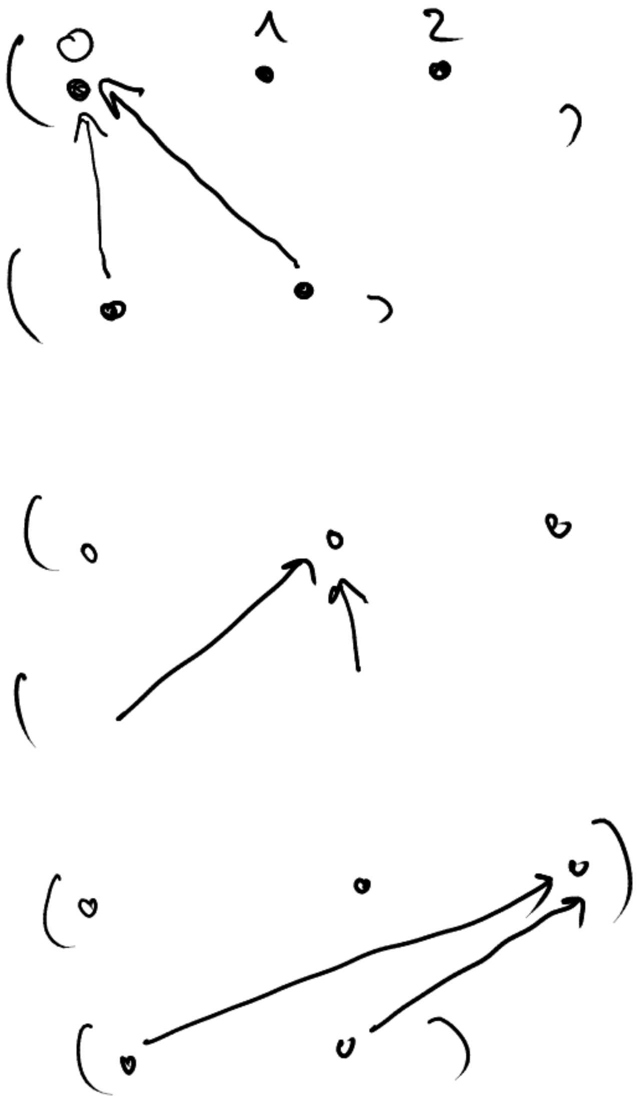
$$A_0 \longrightarrow A_2)$$



$$A_0 \to A_1 \to A_2)$$

$$A_1 \to A_2)$$

I три вироджені:



$$\left(A_0 \to A_1 \to A_2\right)$$

$$\left(A_0 \to A_0\right)$$

$$\left(A_1 \longrightarrow A_1\right)$$

$$A_2 \longrightarrow A_2$$

Σ

Нерв категорії

↓

Функтор $\Delta_{\mathfrak{a}}^{op} \to Sets$

<u>Властивість</u>: Розглянемо морфізми в $\Delta_{\mathfrak{a}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & ([0]_\Delta, A_n) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
([n]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n) \arrow[dr] & & ([m]_\Delta, A_n \to \dots \to A_{n+m}) \arrow[dl] \\
 & ([n+m]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & C(A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C(A_0 \to \dots \to A_n) & (\star) & C(A_n \to \dots \to A_{n+m}) \end{tikzcd}$$

декартів.

Категорія Сігала: $\Delta^{op}_{\mathcal{a}} \to \Delta^{\circ}\,Sets$

$(\star)$ гомотопічно декартові.

Цей підхід до ∞-категорій має ту перевагу, що є зручним для того, щоб визначити (∞, n)-категорії. (∞, n)-категорія — це функтор $\Delta^{op}_{\mathcal{a}} \to \{(\infty, n-1)\text{ кат.}\}$ з властивістю Сігала.

(є тонкощі). (лекції Хініча)

④ Ляйнстер замість Сігала.
T. Leinster G. Segal

Проблема: нехай C — дг категорія.

Об'єкти: $A, B, \dots \in \mathcal{Q}$.

$$C(A_0 \to \dots \to A_n) = C(A_0, A_1) \otimes \dots \otimes C(A_{n-1}, A_n)$$

(не $\times$, як було для $N.C$).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & C(A_0 \to A_1 \to A_2) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
C(A_1 \to A_2) & C(A_0 \to A_2) & C(A_0 \to A_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & f_1, f_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
f_2 & f_1 f_2 & f_1
\end{tikzcd}$$

Не мають сенсу

Обмежимося: $\Delta'_a \subset \Delta_a$

Морфізми:

$$\left([n]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n\right) \to \left([m]_\Delta, B_0 \to \dots \to B_m\right)$$

такі, що $[n] \to [m]$

$0 \mapsto 0$; $n \mapsto m$

∞-категорія Ляйнетера – це функтор

$\underline{\mathrm{I}}$ $\quad \Delta'_a \xrightarrow{C} \mathcal{S}$ — моноїдальна

$\mathcal{S}$ = sets, Δ°sets, Top, ...

з додатковою структурою

$\underline{\mathrm{II}}$

$$\begin{array}{c} C(A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) \\ \big\downarrow \wr \quad \text{слабка еквівал.} \\ C(A_0 \to \dots \to A_n) \otimes C(A_n \to \dots \to A_{n+m}) \end{array}$$

$\underline{\mathrm{II}}$ мусять бути сумісними з I і коасоціативними.

Якщо S = Sets, Tops, ... $\otimes = \times$:

Ляйнстер ⇒ Сігал

$$\begin{tikzcd} C(A_0 \to \dots \to A_n) \arrow[d, "\mathrm{II}"'] & \\ C(A_0 \to A_1) \times C(A_1 \to \dots \to A_n) \arrow[dr, "pr"] & \\ & C(A_1 \to \dots \to A_n) \end{tikzcd}$$

тощо

(∞, n) категорія Ляйнстера – це

$$\Delta'_a \longrightarrow (\infty, n-1) \text{ кат. Ляйнстера}$$

разом з II.

Чому ДГ категорії утворюють вищу 2-категорію?

Питання Дрінфельда. Перша відповідь: Тамаркін '05.

Інші версії: | Lurie; точне посилання і зв'язок з цією лекцією – пізніше

① dgCat – $(\infty, 2)$ категорія по Ляйнстеру. (B.T., NC calculus and operads)

Для двох дг коалгебр:

$$C_1 \otimes C_2 := (C_1^+ \otimes C_2^+) / k \cdot (1 \otimes 1)$$

<u>приклад</u> $C_1 = k[x]/k; \quad C_2 = k[y]/k;$

$$C_1 \otimes C_2 = k[x,y]/k$$

$$\mathrm{Cobar}(C_1 \otimes C_2) \qquad \text{"coshuffle"}$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Cobar}(C_1) \otimes \mathrm{Cobar}(C_2)$$

i) $$(\ldots|b_j|\ldots|c_k|\ldots|b_l|\ldots|c_m|\ldots)$$
$$\downarrow \mathrm{I}$$
$$\pm(\ldots|b_i|\ldots|b_l|\ldots) \otimes (\ldots|c_k|\ldots|c_m|\ldots)$$

ii) $$(\ldots|b \otimes c|\ldots)$$
$$\downarrow \mathrm{I}$$
$$0$$

$$b \in C_1 \qquad c \in C_2$$

Це морфізм дг алгебр; коасоціативний для $C_1, C_2, C_3, \ldots$

$$C(A_0 \to \ldots \to A_n) := \mathrm{Cobar}\big(\mathrm{Bar}\, C(A_0, A_1) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Bar}\, C(A_{n-1}, A_n)\big)$$

I індуковані $\mathrm{Bar} \otimes \mathrm{Bar} \to \mathrm{Bar}$

II індуковані coshuffle

ДГ категорії – категорія Лейнстера в $S = \mathrm{dgCat}$.

② Інший підхід до структури Лайнстера на dg cat: Шойхет "Deligne conjecture..." ≈'13, '15.
B. Shoikhet

③ Дг категорії утворюють категорію Сігала в квазікатегоріях. (Фаонте)
G. Faonte

i) A_∞-нерв ДГ (чи A_∞) категорії:
(Хінін, Фаонте, ...):

$$N_n \mathcal{A} := A_\infty \text{ functors}\left(k[n]_\Delta, \mathcal{A}\right)$$

$$= \operatorname{Hom}_{dg\,Cocat}\left(\operatorname{Bar} k[n]_\Delta, \operatorname{Bar}\mathcal{A}\right)$$

Автоматично симпліціальна множ.; задовольняє властивості Joyal'а

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & N_\bullet \mathcal{A} \\ \Delta^n \arrow[ur, "\exists"'] & \end{tikzcd} \qquad 0<i<n$$

$$C(A_0 \to \ldots \to A_n) :=$$

$$= \operatorname{Hom}_{dg\,Cocat}\left(\operatorname{Bar} k[n]_\Delta, \operatorname{Bar} C(A_0,A_1) \times \ldots \times \operatorname{Bar} C(A_{n-1},A_n)\right)$$

Наступне питання: як це розповсюдити до вищих категорій <u>зі слідом</u>?

Як коланцюги діють на ланцюгах?

<u>Трошки вбік:</u>

Що діє на некомутативних формах?

Якісь н.к. диф. оператори. Наприклад:

$$D : \bar{A} \to A$$

$$a_0\, da_1 \dots da_n \xmapsto{L_D} Da_0 \cdot da_1 \dots da_n + \sum a_0 \cdot da_1 \cdot \ldots \cdot dDa_j \cdot \ldots \cdot da_n$$

(похідна Лі).

<u>Але також:</u>

$$a_0\, da_1 \dots da_n \xmapsto{\iota_D} \sum_{j=1}^{n} \pm a_0 \cdot da_1 \cdot \ldots \cdot Da_j \cdot da_{j+1} \cdots$$

Для $D : \bar{A}^{\otimes k} \to A$ є можливості:

$$a_0\, da_1 \dots da_j \cdot dD(a_{j+1}, \dots, a_{j+k}) \cdot da_{j+k+1} \cdots$$

або

$$\cdot D(a_{j+1}, \dots, a_{j+k})$$

Або:

$$D(a_{l+1},\dots,a_0,\dots,a_j)\,da_{j+1}\dots da_l$$

та їхні композиції.

Яку структуру ці оператори утворюють, і як взаємодіють з d та i_δ?

Не знаю.

(Ко)ланцюги Гохшільда

A ДГА над k; $1 \in k$, ком.

$\partial_A : A^\bullet \to A^{\bullet+1}$

$$A^\bullet[1] = A^{\bullet+1}$$

Коли A - просто алгебра, $A[+1]$ зосереджена в розмірності -1.

$$Bar(A) = \bigoplus_{n \geq 1} A[1]^{\otimes n}$$

(ко)вільна <u>коалгебра</u> з (ко)твірними $A[1]$.

Кодиференціювання

$$\partial : Bar(A) \to Bar(A)^{\text{степ.}+1}$$

Визначене тим, що:

$$\bigoplus A[1]^{\otimes n} \to \bigoplus A[1]^{\otimes n} \xrightarrow{proj} A[1]$$

$$(a_1|\dots|a_n) \mapsto \begin{cases} (-1)^{|a_1|} a_1 a_2, & n=2 \\ \partial_A a_1, & n=1 \\ 0, & n>2 \end{cases}$$

$\partial = \partial_A + \partial_{Bar}$ 2

$$\partial^2 = 0$$

Узагальнення: $m_n : A[+1]^{\otimes n} \to A[1]$
степені 1

(тобто $A^{\otimes n} \to A$ степені $n-2$)

Кодиференціювання, визначене тим, що $(a_1|\ldots|a_n) \longmapsto m_n(a_1,\ldots,a_n)$, $n>0$

Якщо

$$\partial^2 = 0,$$

отримуємо A_∞ алгебру.

Маємо

$$Bar : dg\text{-}Alg \longrightarrow dg\text{-}Coalg$$

і дуально:

$$Cobar : dg\text{-}Alg \leftarrow dg\text{-}Coalg$$

Дг коалгебра $C \rightsquigarrow$

$$Cobar(C) = \prod_{n\geq 1} C[-1]^{\otimes n}$$

Якщо

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i''$$

$$\partial : (c) \mapsto (\partial_C c) + \sum_i (-1)^{c_i'} (c_i') \cdot (c_i'')$$

розповсюджується до диференціювання степеню 1

$$\partial^2 = 0$$

1) $Cobar(Bar(A)) \xrightarrow{\sim} A$

На твірних:

$$(a_1|\ldots|a_n) \mapsto a_1,\ n=1;\ 0,\ n>1.$$

Дуально:

2) $C \xrightarrow{\sim} Bar(Cobar(C))$

1) – морфізм ДГ алгебр

2) – морфізм ДГ коалгебр

Квазі-ізоморфізми. (припущення: C конільпотентна)

Для dg (ко)категорій: 4

$\mathrm{Bar}\,A^\cdot$ — кокатегорія; $\mathrm{Ob} = \mathrm{Ob}(A)$

$$\mathrm{Bar}(A)(x,y) = \bigoplus_{\substack{n\geq 0 \\ x_1,\dots,x_n \in \mathrm{Ob}(A)}} A^\cdot(x,x_1)[1] \otimes A^\cdot(x_1,x_2)[1] \otimes \dots \otimes A^\cdot(x_n,y)[1]$$

$$\mathrm{Cobar}(C)(x,y) = \prod_{\substack{n\geq 0 \\ x_1,\dots,x_n \in \mathrm{Ob}(A)}} C(x,x_1)[-1] \otimes \dots \otimes C(x_n,y)[-1]$$

$$\mathrm{Bar} : dg\text{-}\mathrm{Cat} \rightleftarrows dg\text{-}\mathrm{Cocat}_{\mathrm{conilp}} : \mathrm{Cobar}$$

(Ко)ланцюги Гохшільда dg категорій.

$$\mathrm{Bar}_+(A) := k \oplus \mathrm{Bar}(A)$$

$$\mathrm{Cobar}^+(A) := k \oplus \mathrm{Cobar}(A)$$

$M^{\cdot}$ ДГ бімодуль над A

$$C^{\cdot}(A,M) = \prod_{n\geq 0} \underline{\mathrm{Hom}}_k^{\cdot}\left(A[1]^{\otimes n}, M\right)$$

$$(\delta\varphi)(a_1,\dots,a_{n+1}) = \pm a_1\varphi(a_2,\dots,a_{n+1})$$

$$+\sum_j \pm\varphi(a_1,\dots,a_j a_{j+1},\dots) \pm \varphi(a_1,\dots,a_n)a_{n+1}$$

$$+\sum \pm \varphi(a_1,\dots,\partial_A a_j,\dots,a_n) +$$

$$+\partial_M \varphi(a_1,\dots,a_n)$$

Як знайти цю формулу?

$$C^{\cdot}(A,A) = \mathrm{CoderBar}(A)$$

$$\varphi_n : A[1]^{\otimes n} \to A \mid n\geq 0$$

$$\updownarrow$$

єдине кодиференціювання, для

якого

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bar}(A) \arrow[r] & \mathrm{Bar}(A) \arrow[r, "\mathrm{proj}"] & A[1] \end{tikzcd}$$

$$(a_1|\ldots|a_n) \longmapsto \varphi_n(a_1,\ldots,a_n)$$

$$\forall n$$

Скобка Герстенхабера:

$$\varphi\circ\psi \mp \psi\circ\varphi$$

на $\mathrm{Coder}(\mathrm{Bar}(A))$

$$m_2(a_1, a_2) := (-1)^{|a_1|} a_1 a_2$$

$$m_1(a_1) := \partial a_1$$

$$m = m_1 + m_2$$

$$\delta = [m, -]$$

Ті ж самі формули для загального M.

$$\varphi : A[1]^{\otimes n} \to A$$

$$\psi : A[1]^{\otimes m} \to A$$

$$\varphi\{\psi\}(a_1, \ldots, a_{n+m-1}) =$$

$$= \sum \pm \varphi\left(a_1, \ldots, \psi(a_{j+1}, \ldots, a_{j+m}), \ldots\right)$$

$$[\varphi, \psi] = \varphi\{\psi\} - (-1)^{(|\varphi|-1)(|\psi|-1)} \psi\{\varphi\}$$

$=$

ДГ алгебра Ли

$$C^{\bullet+1}(A, A), \delta, [\,,\,]$$

$=$

Ланцюги Гохшільда:

$$C_\bullet(A, M) = \bigoplus_{n\geq 0} M \otimes A[1]^{\otimes n}$$

$$b(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \pm a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_n$$

$$\pm a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} + \partial_M a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \pm a_0 \otimes \ldots \otimes \partial_A a_j \otimes \ldots \otimes a_n$$

Для ДГ категорій:

Бімодуль над A: Комплекси

$M(x, y)$,

$$C^\bullet(A, M) = \prod_{\substack{n\geq 0 \\ x_0, \ldots, x_{n+1} \in Ob(A)}} Hom\big(A(x_0, x_1)[1] \otimes \ldots \otimes A(x_n, x_{n+1})[1], M(x_0, x_{n+1})\big)$$

Щодо ланцюгів:

$$C_\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{\substack{n \geq 0 \\ x_0, \dots, x_n}} \mathcal{M}(x_0, x_1) \otimes \mathcal{A}(x_1, x_2)[1] \otimes \dots \otimes \mathcal{A}(x_n, x_0)[1]$$

<u>Зручніше</u>: замість $\mathcal{A}(x,y)[1]$

$\overline{\mathcal{A}}(x,y)[1]$, де

$$\overline{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} \mathcal{A}(x,y), & x \neq y \\ \mathcal{A}(x,x)/k \cdot 1_x, & x = y \end{cases}$$

(<u>нормалізовані</u> (ко)ланцюги).

Формули для диференціалів

$\delta : C^\bullet \to C^{\bullet+1}$ і $C_\bullet \xrightarrow{b} C_{\bullet-1}$

такі ж самі.

Завжди:

$$C_p := C^{-p}$$

Для звичайної алгебри A: 10

$$M \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\bar{A}, M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\bar{A}^{\otimes 2}, M) \to$$

$$m \longmapsto [\_, m]$$

$$\varphi : \bar{A} \to M \longmapsto (\delta\varphi)(a_1, a_2) =$$

$$= a_1\varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1)a_2$$

$$HH^0(A, M) = \mathrm{Center}(M) = \{m \mid am = ma, \forall a\}$$

$$HH^1(A, M) = \mathrm{Der}(A, M) / \mathrm{Der}_{in}(A, M)$$

також:

$HH^2(A, M) = \{$класи ізоморфізму деформацій A за допомогою ідеалу квадрата нуль, який $\xrightarrow{\sim} M$ як A-бімодуль$\}$

(Добуток на $A \dotplus M$:

$$(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) = a_1 a_2 +$$

$$+ (a_1 m_2 + m_1 a_2 + \varphi(a_1, a_2))$$

Ланцюги:

$$\longrightarrow M\otimes A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} M\otimes A \xrightarrow{b} M$$

$$m\otimes a \mapsto ma - am$$

$$HH_0(A,M) = M/[A,M]$$

ДГ категорії $C^\bullet(A,B)$

Об'єкти: $f: A\to B$

(насправді: A_∞ функтори)

$$C^\bullet(A,B)(f,g) = C^\bullet(A,{}_fB_g)$$

$${}_fB_g = B;\quad a_1\cdot b\cdot a_2 = f(a_1)\,b\,g(a_2)$$

Композиція:

$$C^\bullet(A,{}_fB_g)\otimes C^\bullet(A,{}_gB_h)\to C^\bullet(A,{}_fB_h)$$

$$\varphi: A^{\otimes n}\longrightarrow B \qquad \psi: A^{\otimes m}\to B$$

$$(\varphi\cup\psi)(a_1,\dots,a_{n+m}) = \pm\varphi(a_1,\dots,a_n)\,\psi(a_{n+1},\dots,a_{n+m})$$

Зауваження.

A_∞ морфізм дг $A^\bullet \to B^\bullet$:

$\mathrm{Bar}(A^\bullet) \to \mathrm{Bar}(B^\bullet)$ морфізм дг коалг.

Або:

$f \in C^\bullet(A, B)$ $\quad$ $\delta f + f \cup f = 0$

$f_n : A^{\otimes n} \to B$, $n \geq 1$, задовольняє тотожностям...

A_∞ функтор $A^\bullet \to B^\bullet$: $f : \mathrm{Ob}(A) \to \mathrm{Ob}(B)$

$f_n : A(x_0, x_1) \otimes \ldots \otimes A(x_{n-1}, x_n) \to B(fx_0, fx_n)$

ті ж самі тотожності.

(Або: дг (ко?) функтор

$\mathrm{Bar}(A) \longrightarrow \mathrm{Bar}(B)$).

3

Про гомотопічну алгебру дг категорій

(техніка, яка дозволяє:

R – резольвента

$$\begin{array}{c} R \\ \downarrow \\ A \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, dashed, bend left, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & S \arrow[ll, dashed, "\sim"] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

...

(для двох резольвент)

Випадок ДГ алгебр: (Квіллен)

Розшарування: $A \twoheadrightarrow B$ (сюр'єктивні)

"$\twoheadrightarrow$"

Слабкі еквівалентності: $A \xrightarrow{\simeq} B$ (квазі-ізоморфізми)

"$\xrightarrow{\simeq}$"

Корозшарування:

"$\rightarrowtail$"

$$\forall$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, tail] & A_1 \arrow[d, "\wr", two heads] \\
B \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B_1
\end{tikzcd}$$

Властивість підйому зліва

Більш конструктивно:
Елементарний крок - додати декілька нових <u>вільних</u> змінних, диференціали яких:

$$dx^{\text{нові}} \subset A\langle x^{\text{попередні}} \rangle$$

Корозшарування: отримати B з A за допомогою елементарних кроків; будь-який $\boxed{\text{ретракт}}$ такого,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, shift left] & B \arrow[d, shift left] \\
A' \arrow[r] \arrow[u, shift left] & B' \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd} \quad \Big| \quad \circlearrowleft = \mathrm{id}$$

<u>Для ДГ категорій</u>: було б те ж саме, якби усі вони мали ті ж самі об'єкти, і f було б тотожністю (чи бієкцією) на об'єктах.

Гомотопічна категорія $H^0(A)$ (чи $Ho(A)$)

$$H^0(A)(x,y) := H^0(A^\bullet(x,y))$$

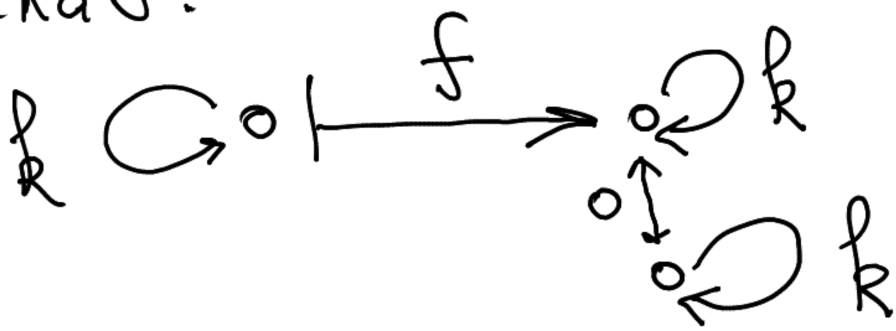
z

Розшарування: $f: A^\bullet \to B^\bullet$

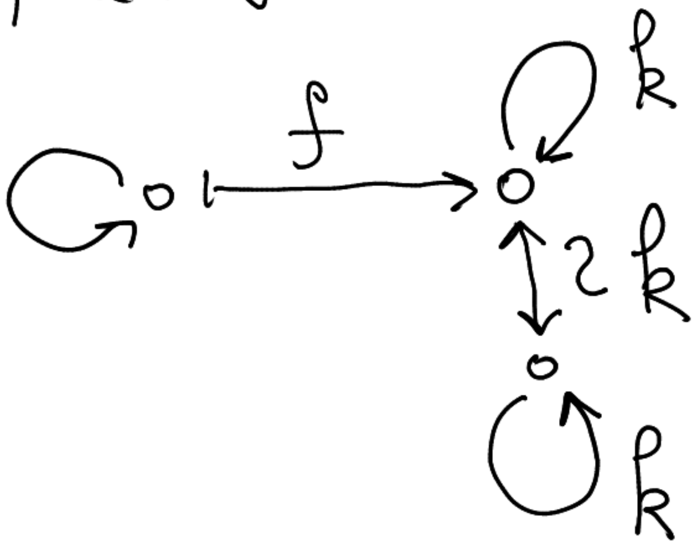
1) $A^\bullet(x,y) \twoheadrightarrow B^\bullet(fx, fy)$

2)
$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f(x) \\ \exists\ \wr\uparrow \text{ в } H^0(A^\bullet) & & \uparrow\wr \text{ в } H^0(B^\bullet) \\ y & \longmapsto & z \end{array}$$

Приклад:

1 

Контрприклад:

2 

Слабкі еквівалентності:

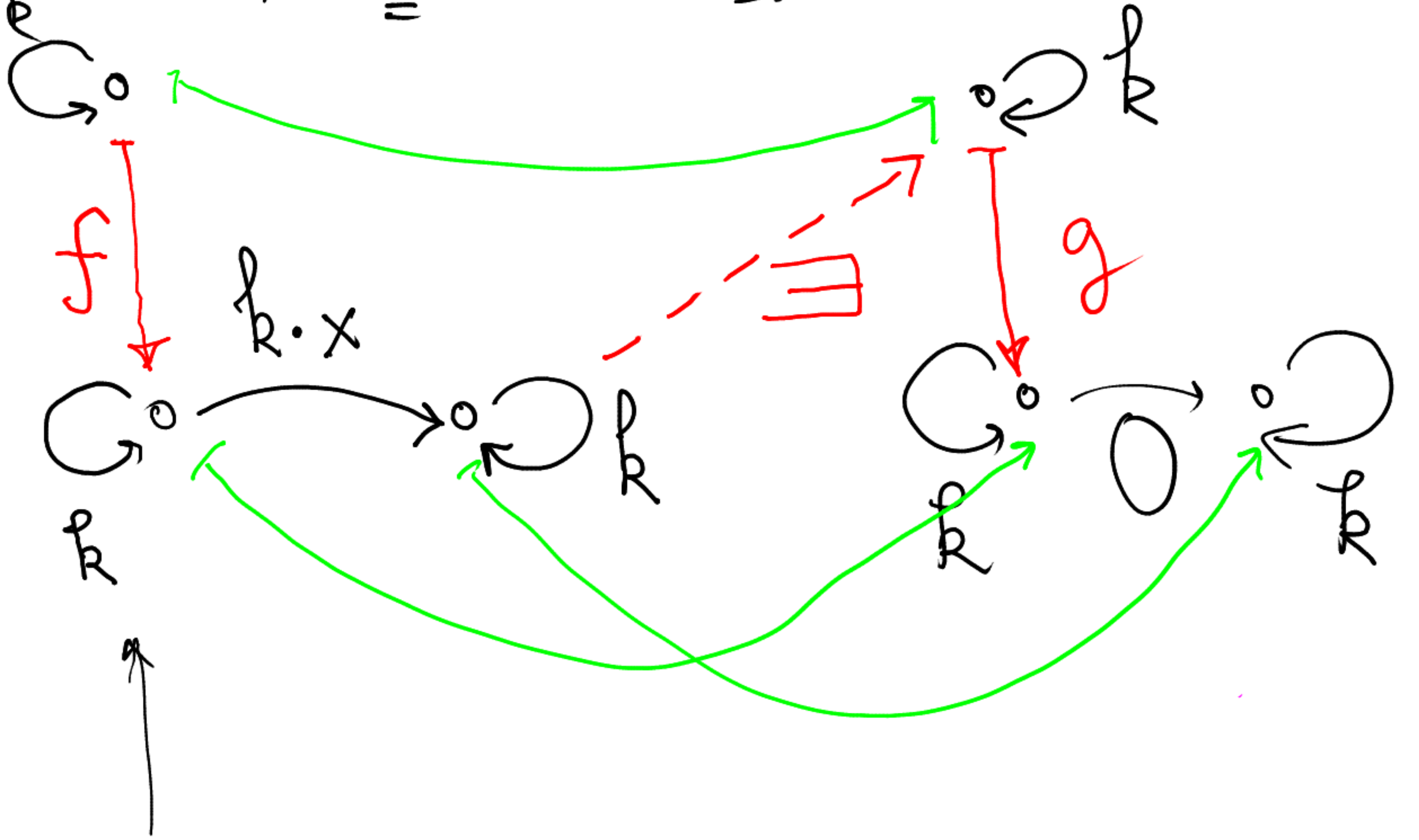
1) $A^\circ(x,y) \xrightarrow[\text{quis}]{\sim} B^\circ(fx,fy)$

2) $$\begin{array}{ccc} Ob(H^0(A)) & \xrightarrow{f} & Ob(H^0(B)) \\ \parallel & & \parallel \\ Ob(A) & & Ob(B) \end{array}$$

істотно сюр'єктивний

приклад: 2 контрприклад: 1

<u>Приклад.</u> Якщо було б розшарування і сл. екв.:



f не було б корозшарування.

Корозшарування: визначене властивістю підйому зліва для

Теорема (Табуада). DGCat — замкнена модельна категорія.

__Вправа__

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop right, "k"] \arrow[d, "f"] \\ \circ \arrow[loop left, "k"] \arrow[r, "k\cdot x"] & \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd}$$

— це корозшарування.

Так саме як

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop right, "k"] \arrow[d] \\ \circ \arrow[loop left, "k"] \arrow[r, leftrightarrow, "0"'] & \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd}$$

__Вправа.__ Якщо $f: \overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$, то:

$f: \mathrm{Ob}\,A \twoheadrightarrow \mathrm{Ob}\,B$; $Z^n A(x,y) \twoheadrightarrow Z^n B(fx,fy)$

ДГ категорія шляхів:

$$A^{\Delta^1} = A * \underbrace{C^\bullet(\Delta^1)}_{\text{коланцюги}, \cup}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \arrow[d, "d"] & 0 \\ \mathbb{Z}\varepsilon & 1 \end{tikzcd}$$

$e_0^2 = e_0$
$e_1^2 = e_1$
$e_0 e_1 = e_1 e_0 = 0$
$e_0 \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon e_1$
$\varepsilon e_0 = 0 = e_1 \varepsilon$

Тепер маємо можливість говорити про гомотопні дг функтори:

$$A \to B^{\Delta^1} \underset{ev_1}{\overset{ev_0}{\rightrightarrows}} B$$

І про резольвенти:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "\wr"] \\ A_0 \arrow[ur, dotted] \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

Дві резольвенти є гомотопічно еквівалентними, тощо.

-

Якщо я вірно розумію: dgCat — не те, що називається симпліціальною модельною категорією.

Поки що маємо:

Дг категорії A, B

$\rightsquigarrow$

Дг категорія $C^\bullet(A,B)$

Хотіли б:

$$C^\bullet(A,B)\otimes C^\bullet(B,C)\to C^\bullet(A,C)$$

dg функтор, асоціативний...

Насправді маємо A_∞ функтор...

Могли б шукати якихось вищих співвідношень асоціативності для цих A_∞ функторів, ... Але ми обираємо дещо інший шлях.

Операції brace і морфізм

$$\mathrm{Bar}\,C(A,B)\otimes \mathrm{Bar}\,C(B,C)\to$$
$$\to \mathrm{Bar}\,C(A,C)$$

1. "Некомутативні диференціальні оператори" на лінійному просторі.

V — (градуйований) лінійний простір. $T(V)=\bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$

0) Кожне лінійне відображ.

$D: V\to V \rightsquigarrow$ диференціювання

$$\mathrm{Op}(D): T(V)\to T(V)$$

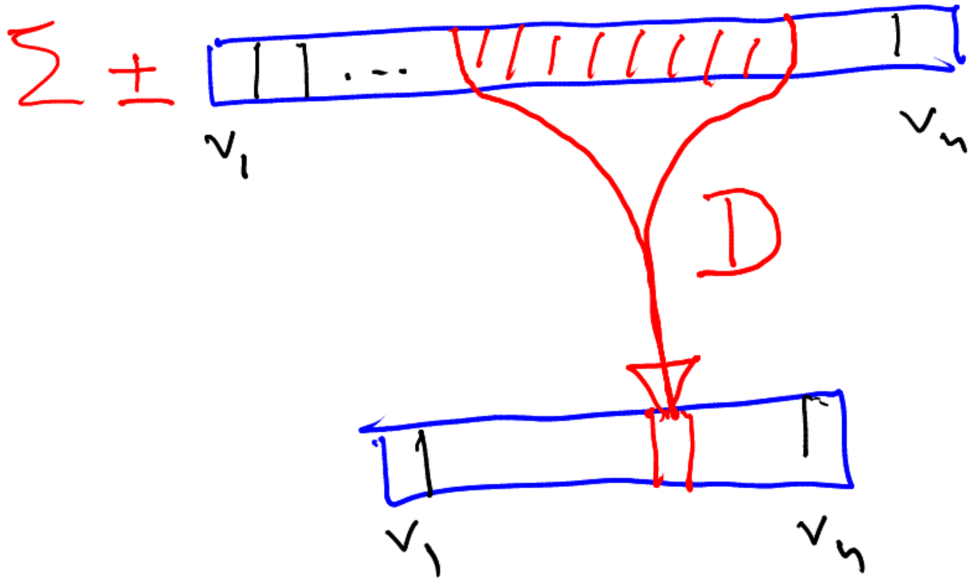
$$v_1\dots v_n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \pm v_1\dots D(v_k)\dots v_n$$

1) Кожне мультілінійне

$$D: V^{\otimes l}\to V$$

$$Op(D) : T(V) \to T(V)$$

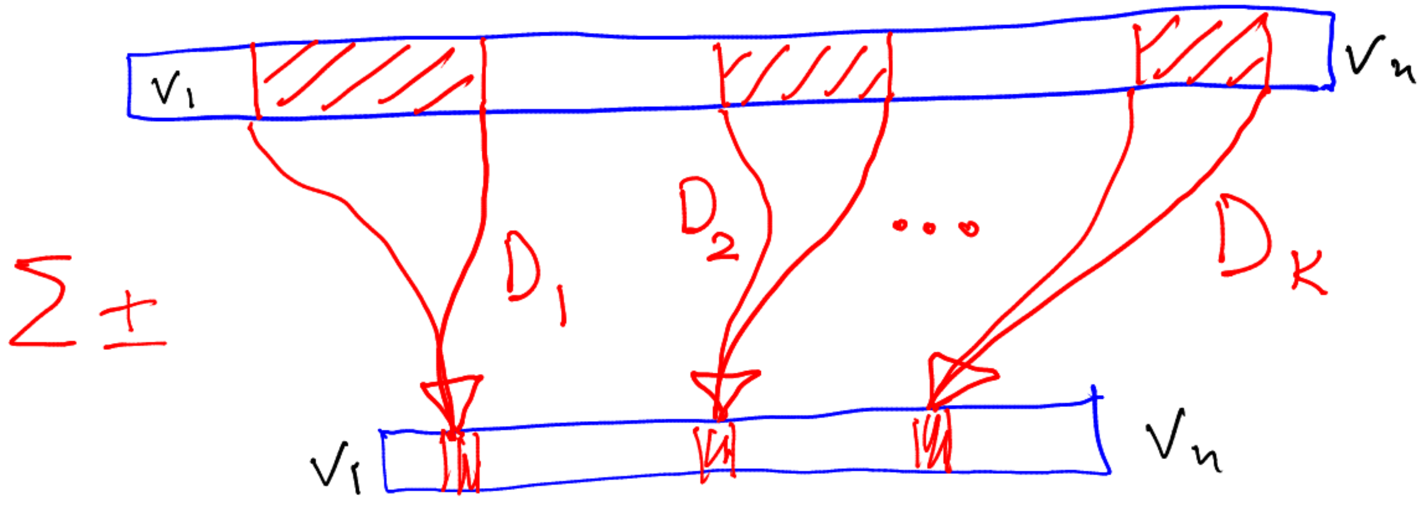
$$v_1 \ldots v_n \mapsto \sum_{j=0}^{n-\ell} \pm\, v_1 \ldots D(v_{j+1}, \ldots, v_{j+\ell}) \ldots v_n$$



Більш того, декілька

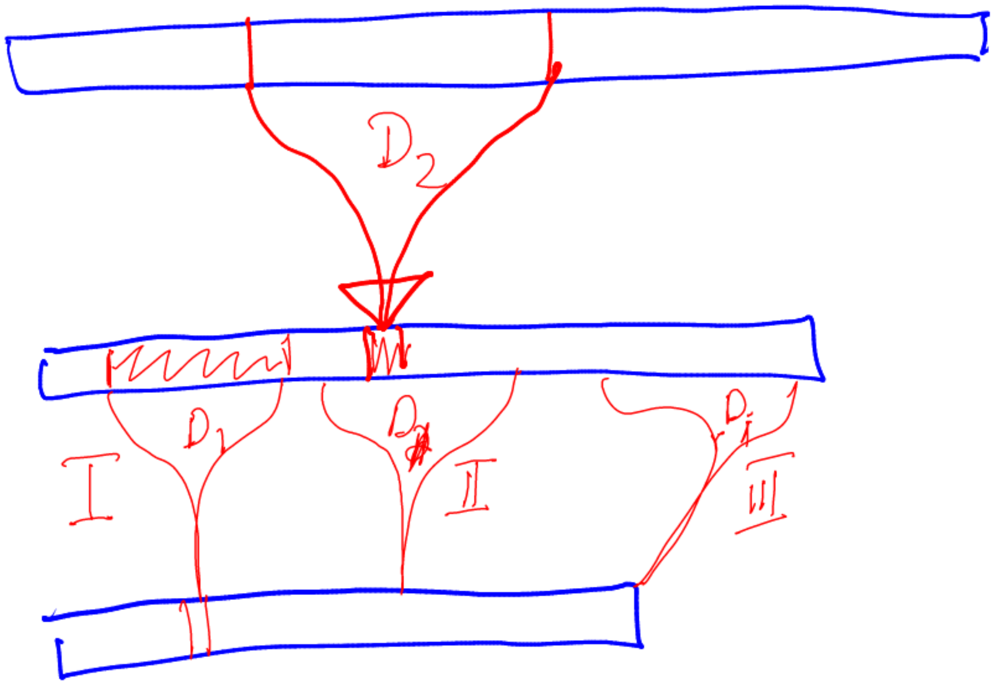
$$D_k : V^{\otimes \ell_k} \to V, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$Op(D_1, \ldots, D_k) : TV \to TV$$



Лінійна оболонка таких операторів $T(V)$ замкнена відносно композиції:

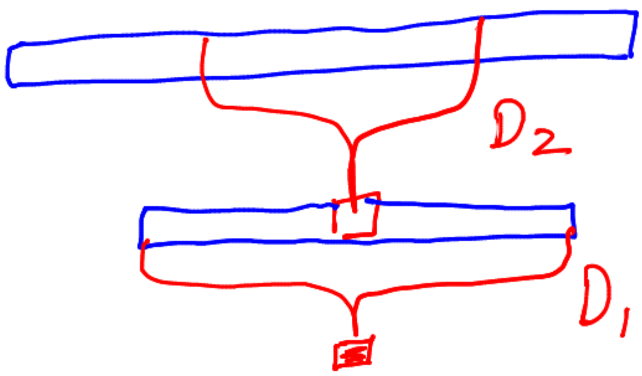
$$Op(D_1) \circ Op(D_2) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$



$$\mathrm{I} = \pm Op(D_1, D_2) \qquad \mathrm{II} = \pm Op(D_2, D_1)$$

$$\mathrm{III} = \pm Op(D_1\{D_2\})$$

$D_1\{D_2\}$:



$D_1 : V^{\otimes n_1} \to V \qquad D_2 : V^{\otimes n_2} \to V$

$$D_1 \circ D_2 : V^{\otimes (n_1 + n_2 - 1)} \to V$$

Маємо асоціативну алгебру

$$\mathrm{Tens}^*(\mathrm{Hom}(V^{\otimes \bullet}, V)) \quad (\star)$$

$$* > 0 \; ; \; \bullet \geqslant 0$$

Ця алгебра діє на $T(V)$ "н.к. диф. операторами".

Тепер:

$$V = A[1]$$

$$\mathrm{Hom}(A[1]^{\otimes \bullet}, A[1]) = C^{\bullet}(A, A)[1]$$

$$(*) = \mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)$$

$$=$$

$$(\varphi_1|\dots|\varphi_n)\bullet(\psi_1|\dots|\psi_m) =$$

$$= (\varphi_1|\dots|\varphi_{n_1}|\dots|\dots|\varphi|\dots|\dots|\varphi|\dots|\varphi|\dots)$$

$$\sum \pm (\varphi_1|\dots|\psi_1|\varphi|\dots|\psi_2|\dots|\psi_m|\dots)$$

$$= \sum \pm (\varphi_1|\dots|\psi_1\{\varphi_{i_1+1},\dots\}|\dots|\psi_2\{\varphi_{i_2+1},\dots\}|\dots)$$

(Getzler-Jones; Gerstenhaber-Voronov) '94

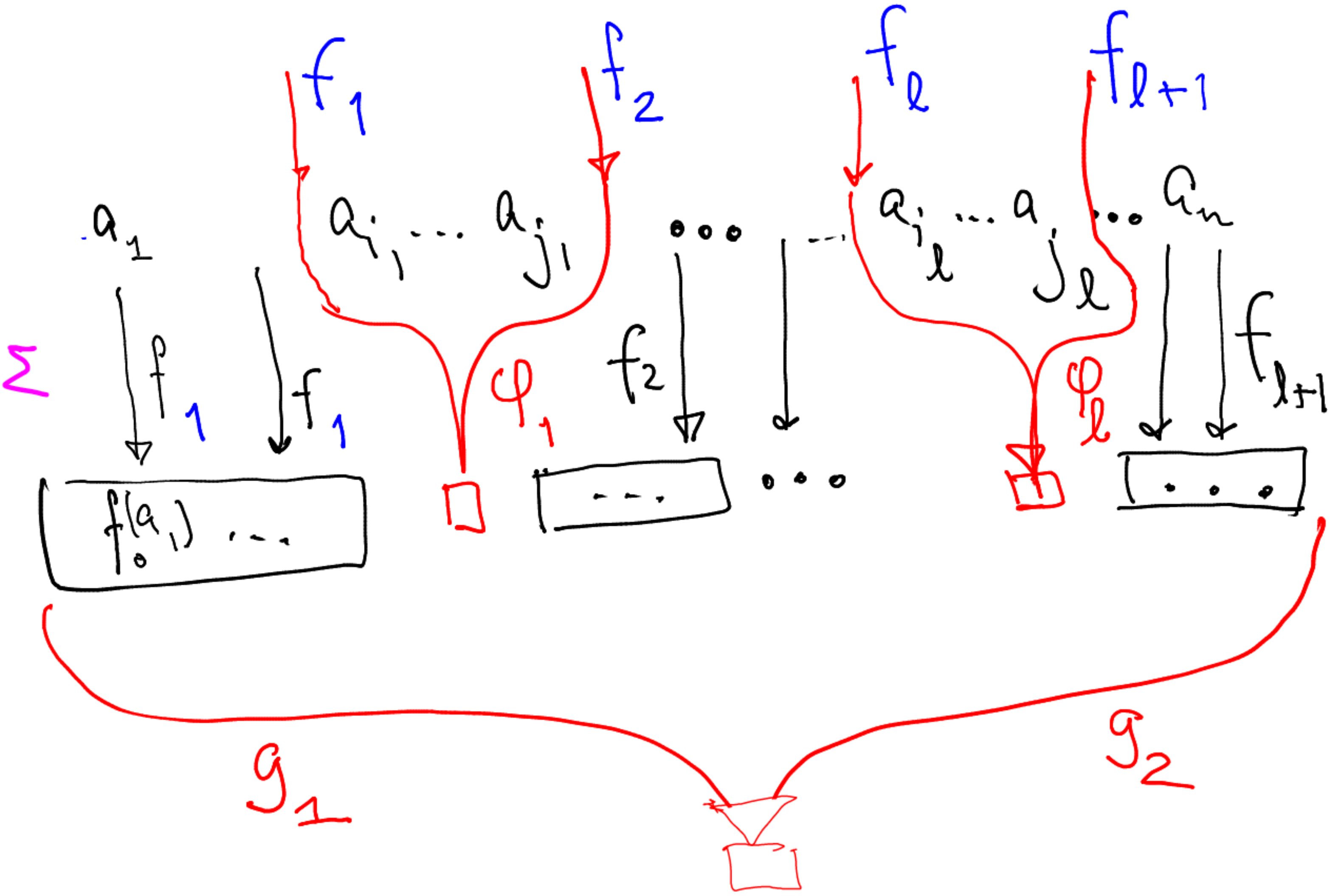
Факт: це морфізм ДГ коалгебр

$$\boxed{(\Phi\bullet\Psi)\bullet\Theta = \Phi\bullet(\Psi\bullet\Theta)}$$

$$\mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)^{\otimes 2} \to \mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)$$

Для ДГ категорій:

$\psi\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$:

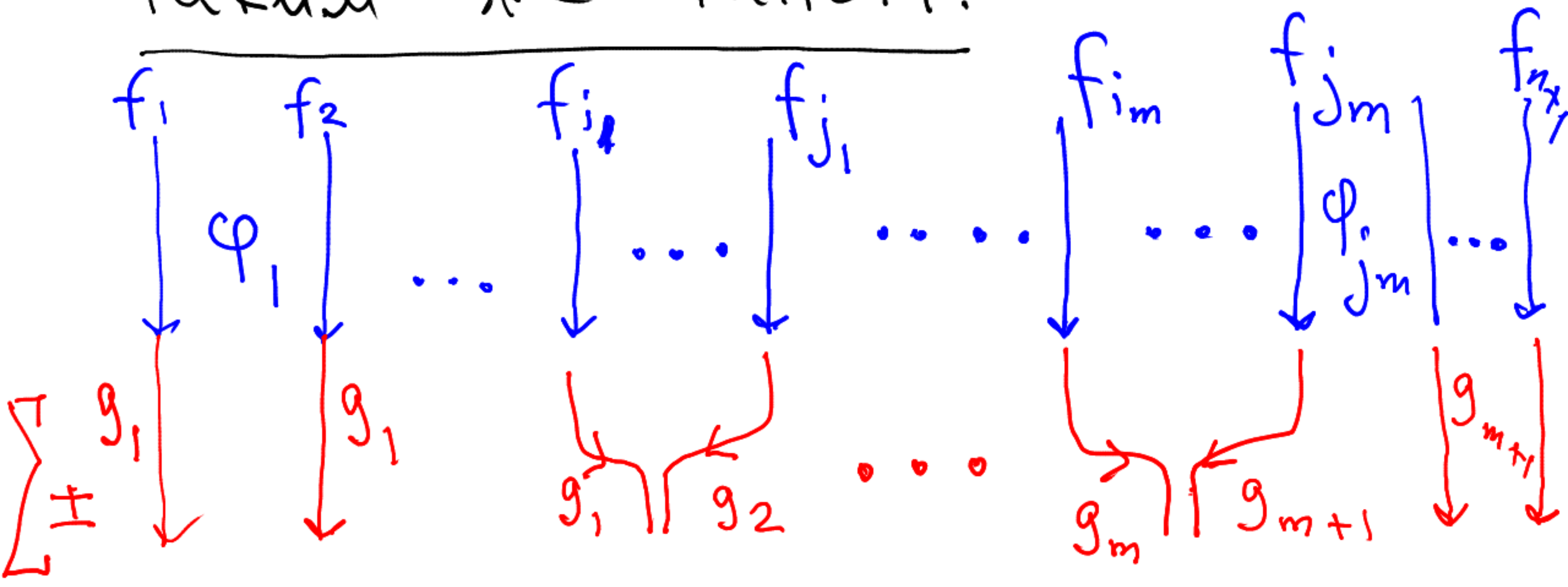


$$\varphi_1 \in C^\cdot(A_{f_1}, B_{f_2}) \dots \varphi_l \in C^\cdot(A_{f_l}, B_{f_{l+1}}),$$

$$\psi \in C^\cdot(B_{g_1}, C_{g_2})$$

$$\psi\{\varphi_1, \dots, \varphi_l\} \in C^\cdot(A_{g_1 f_1}, C_{g_2 f_{l+1}})$$

Таким же чином:



$$\Big(g_1\circ\varphi_1 \,\Big|\, g_1\circ\varphi_2 \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \psi_1\{\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{j_1}\} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \psi_m\{\varphi_{i_m},\dots,\varphi_{j_m}\} \,\Big|\, \dots\, g_{m+1}\circ\varphi_n\Big)$$

$$\operatorname{Bar} C^{\bullet}(A,B)(f_1, f_{n+1}) \otimes \operatorname{Bar} C^{\bullet}(B,C)(g_1, g_{m+1}) \to \operatorname{Bar} C^{\bullet}(A,C)(g_1 f_1, g_{m+1} f_{n+1})$$

Морфізм ДГ кокатегорій

Висновок:

$$\mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,B) \otimes \mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(B,C)$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,C)$$

$$\mathrm{Bar}(A) \otimes \mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,B)$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Bar}(B)$$

Морфізми $\underline{\underline{\Delta}}\Gamma$ кокатег.;

Все <u>асоціативне.</u>

∞-категорії

① Квазі-категорії

Маємо <u>справжню</u> категорію

C:

$$N_n C = \left\{ i_0 \to i_1 \to \dots \to i_n \right\}$$

$$i_0, \dots \in Ob(C)$$

$$\begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, shift left=3, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] \arrow[d, shift right=3, "d_2"] \\ N_1 C \arrow[u, bend left=50, "s_0"] \arrow[u, bend right=50, "s_1"'] \arrow[d, shift left=2, "d_0"'] \arrow[d, shift right=2, "d_1"] \\ N_0 C \arrow[u, bend left=50, "s_0"] \end{tikzcd}$$

симпліціальна множина.

<u>Або</u>: $[n]_\Delta = \{0 \to 1 \to \dots \to n\}$

$$N_n C = Funct([n]_\Delta, C)$$

Δ : об'єкти $[n]$, $n \geq 0$

$[n] \to [m]$: $\mathrm{Funct}([n]_\Delta, [m]_\Delta)$

$N_\bullet C$ — симпліціальна множина,

або

$$N_\bullet C : \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$\Delta^n := N[n]_\Delta$$

$\Lambda^n_i = \partial\Delta^n$ без  $\partial_i \Delta^n$

(формальне визначення: ...)

$N_\bullet C$ задовольняє:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & X_\bullet \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists"'] & \end{tikzcd} \qquad \boxed{0 < i < n}$$

Такі $X_\bullet$ – квазікатегорії (Joyal). Це один з підходів до ∞- (або $(\infty,1)$) – категорій.

Якщо ⋆ виконується для будьякого $0 \le i \le n$, то $X_\circ$ – комплекс Кана. Якщо C – групоїд, то $N_\circ C$ – комплекс Кана.

2 Сімпліціальні категорії.

Категорії, збагачені сімпліц. множинами, тобто:

Об'єкти: $x, y, \ldots$

$C_\circ(x,y)$ – Δ°-множ.;

$$C_\circ(x,y)\times C_\circ(y,z)\to C_\circ(x,z)$$ 31

асоц.; $1_x \in C_\circ(x,x)$; ...

ξ

Друге визначення $(\infty,1)$-кат.:

$C_\circ$ де усі $C_\circ(x,y)$ – комплекси Кана.

ξ

3 Категорії Сігала

Ідея. Категорія з множ. об'єктів $\mathcal{Q}$:

Кожному символу $A_0\to\ldots\to A_n$, $A_j\in\mathcal{Q}$ – множина $\{A_0\xrightarrow{f_1}\ldots\xrightarrow{f_n}A_n\}$

$\Delta_{\mathcal{Q}}$: об'єкти: $([n]; A_0\to\ldots\to A_n)$

Тобто: $[n]_\Delta$; $[n] \to Q$

$\left([n] := \mathrm{ob}([n]_\Delta) = \{0, 1, \dots, n\} \right)$

Кожний функтор

$$[n]_\Delta \xrightarrow{f} [m]_\Delta \qquad f \in \Delta([n],[m]):$$

$$\{[n] \to Q\} \xleftarrow[f^*]{} \{[m] \to Q\}$$

Об'єкти в Δ_Q:

$$[n]_\Delta ; \alpha : [n] \to Q$$

Морфізми в Δ_Q:

$$([n]_\Delta ; \alpha) \to ([m]_\Delta ; \beta) -$$

це пара

$[n]_\Delta \xrightarrow[f]{} [m]_\Delta$, така, що $f^* \beta = \alpha$.

Приклад

$$\begin{tikzcd}
{[2]_\Delta} ; & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \\
{[1]_\Delta} ; \arrow[u, triangle] & B_0 \arrow[r] & B_1 &
\end{tikzcd}$$

①

$$\begin{tikzcd}
\Big(\overset{0}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} & \overset{2}{\bullet} , & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big) \\
\Big(\underset{0}{\bullet} \arrow[u] & \underset{1}{\bullet} \arrow[u] & , & A_0 \arrow[r] & A_1 \Big) &
\end{tikzcd}$$

②

$$\begin{tikzcd}
\Big(\overset{0}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} & \overset{2}{\bullet} , & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big) \\
\Big(\underset{0}{\bullet} \arrow[u] & \underset{1}{\bullet} \arrow[ur] & , & A_0 \arrow[rr] & & A_2 \Big)
\end{tikzcd}$$

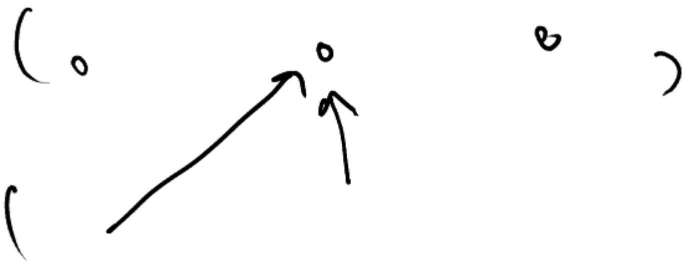
③

$$\begin{tikzcd}
\Big(\overset{0}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} & \overset{2}{\bullet} , & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big) \\
\Big(\underset{0}{\bullet} \arrow[ur] & \underset{1}{\bullet} \arrow[ur] & & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big) &
\end{tikzcd}$$

I три вироджені:

$A_0 \to A_1 \to A_2$)

$A_0 \to A_0$)



$A_1 \to A_1$)

$A_2 \to A_2$

Нерв категорії

↧

Функтор $\Delta_{\mathfrak{a}}^{op} \to Sets$

<u>Властивість</u>: Розглянемо морфізми в $\Delta_{\mathfrak{a}}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & ([0]_\Delta, A_n) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
([n]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n) \arrow[dr] & & ([m]_\Delta, A_n \to \dots \to A_{n+m}) \arrow[dl] \\
 & ([n+m]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & C(A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C(A_0 \to \dots \to A_n) & (\star) & C(A_n \to \dots \to A_{n+m}) \end{tikzcd}$$

декартів.

<u>Категорія Сігала:</u> $\Delta_{\mathcal{a}}^{op} \to \Delta^{o}$ Sets

$(\star)$ <u>гомотопічно</u> декартові.

Цей підхід до ∞-категорій має ту перевагу, що є зручним для того, щоб визначити (∞, n)-категорії. (∞, n)-категорія – це функтор $\Delta_{\mathcal{a}}^{op} \to \{(\infty, n-1) \text{ кат.}\}$ з властивістю Сігала.

(є тонкощі). (лекції Хініча_)

4 Ляйнстер замість Сігала.
T. Leinster G. Segal

<u>Проблема</u>: нехай $\mathcal{C}$ – дг категорія.

Об'єкти : $A, B, \dots \in \mathcal{Q}$.

$$\mathcal{C}(A_0 \to \dots \to A_n) = \mathcal{C}(A_0, A_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(A_{n-1}, A_n)$$

(не $\times$, як було для N.C).

$$\begin{tikzcd}
 & C(A_0\to A_1\to A_2) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
C(A_1\to A_2) & C(A_0\to A_2) & C(A_0\to A_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & f_1, f_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
f_2 & f_1 f_2 & f_1
\end{tikzcd}$$

Не мають сенсу

Обмежимося: $\Delta'_a \subset \Delta_a$

Морфізми:

$$([n]_\Delta, A_0\to\dots\to A_n) \to ([m]_\Delta, B_0\to\dots\to B_m)$$

такі, що $[n]\to[m]$

$0\mapsto 0$; $n\mapsto m$

∞-категорія Ляйнетера — це функтор

$\underline{\mathrm{I}}$ $\quad \Delta'_a \xrightarrow{C} \mathcal{S}$ — моноїдальна

$\mathcal{S}$ = sets, Δ° sets, Top, ...

з додатковою структурою

$\underline{\mathrm{II}}$

$$\begin{tikzcd}
C(A_0\to\dots\to A_n\to\dots\to A_{n+m}) \arrow[d, "\wr"] \\
C(A_0\to\dots\to A_n)\otimes C(A_n\to\dots\to A_{n+m})
\end{tikzcd}$$

слабка еквівал.

$\underline{\mathrm{II}}$ мусять бути сумісними з I і коасоціативними.

Якщо S = Sets, Tops, ... $\otimes = \times$:

Ляйнстер $\Rightarrow$ Сігал

$$\begin{tikzcd} & C(A_0 \to \dots \to A_n) \arrow[dl, "\mathrm{II}"'] & \\ C(A_0 \to A_1) \times C(A_1 \to \dots \to A_n) \arrow[dr, "pr"] & & \\ & C(A_1 \to \dots \to A_n) & \end{tikzcd}$$

тощо

(∞, n) категорія Ляйнстера – це

$$\Delta'_a \longrightarrow (\infty, n-1) \text{ кат. Ляйнстера}$$

разом з II.

Чому ДГ категорії утворюють вищу 2-категорію?

Питання Дрінфельда. Перша відповідь: Тамаркін '05.

Інші версії: | Lurie; точне посилання і зв'язок з цією лекцією – пізніше

① dgCat – $(\infty, 2)$ категорія по Ляйнстеру. (B.T., NC calculus and operads)

Для двох $\partial 2$ коалгебр:

$$C_1 \otimes C_2 := (C_1^+ \otimes C_2^+)/k \cdot (1 \otimes 1)$$

Приклад $C_1 = k[x]/k$; $C_2 = k[y]/k$;

$$C_1 \otimes C_2 = k[x,y]/k$$

$$\mathrm{Cobar}(C_1 \otimes C_2) \quad \text{"coshuffle"}$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Cobar}(C_1) \otimes \mathrm{Cobar}(C_2)$$

i) $(\ldots|b_j|\ldots|c_k|\ldots|b_\ell|\ldots|c_m|\ldots)$

$$\mathrm{I}$$

$$\pm(\ldots|b_j|\ldots|b_\ell|\ldots) \otimes (\ldots|c_k|\ldots|c_m|\ldots)$$

ii) $(\ldots|b\otimes c|\ldots)$

$$\mathrm{I}$$

$$0$$

$$b \in C_1 \qquad c \in C_2$$

Це морфізм дг алгебр; коасоціативний для $C_1, C_2, C_3, \ldots$

$$C(A_0 \to \ldots \to A_n) := \mathrm{Cobar}\big(\mathrm{Bar}\, C(A_0, A_1) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Bar}\, C(A_{n-1}, A_n)\big)$$

I індуковані $\mathrm{Bar} \otimes \mathrm{Bar} \to \mathrm{Bar}$

II індуковані coshuffle

ДГ категорії — категорія Лейнстера в $S = \mathrm{dgCat}$.

② Інший підхід до структури Лейнстера на dg cat: Шойхет "Deligne conjecture..."
B.Shoikhet ≈ '13, '15.

③ ДГ категорії утворюють категорію Сігала в квазікатегоріях. (Фаонте)
G. Faonte

i) A_∞-нерв ДГ (чи A_∞) категорії: (Хініч, Фаонте,...):

$$N_n \mathcal{A} := A_\infty \text{ functors}\left(k[n]_\Delta, \mathcal{A}\right)$$
$$= \mathrm{Hom}_{dg\,Cocat}\left(\mathrm{Bar}\, k[n]_\Delta, \mathrm{Bar}\, \mathcal{A}\right)$$

Автоматично симпліціальна множ.; задовольняє властивості Joyal'a

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & N_\bullet \mathcal{A} \\ \Delta^n \arrow[ur, "\exists"'] & \end{tikzcd} \qquad 0<i<n$$

$$C(A_0 \to \dots \to A_n) :=$$
$$= \mathrm{Hom}_{dg\,Cocat}\left(\mathrm{Bar}\, k[n]_\Delta, \mathrm{Bar}\, C(A_0, A_1) \times \dots \times \mathrm{Bar}\, C(A_{n-1}, A_n)\right)$$

Наступне питання: як це розповсюдити до вищих категорій зі слідом?

Як коланцюги діють на ланцюгах?

Трошки вбік:

Що діє на некомутативних формах?

Якісь н.к. диф. оператори. Наприклад:

$D : \bar{A} \to A \qquad L_D$

$$a_0\, da_1 \dots da_n \xmapsto{L_D} Da_0 \cdot da_1 \dots da_n + \sum a_0 \cdot da_1 \cdot \ldots \cdot dDa_j \cdot \ldots \cdot da_n$$

("похідна Лі").

Але також:

$$a_0\, da_1 \dots da_n \xmapsto{\iota_D} \sum_{j=1}^{n} \pm a_0 \cdot da_1 \cdot \ldots \cdot Da_j \cdot da_{j+1} \cdots$$

Для $D : \bar{A}^{\otimes k} \to A$ є можливості:

$$a_0\, da_1 \dots da_j \cdot dD(a_{j+1}, \dots, a_{j+k}) \cdot da_{j+k+1} \cdots$$

або

$$\cdot D(a_{j+1}, \dots, a_{j+k}) \cdot$$

Або:

$$D(a_{l+1},\dots,a_0,\dots,a_j)\,da_{j+1}\dots da_l$$

Та їхні композиції.

Яку структуру ці операто-ри утворюють, і як взаємодіють з d та ι_Δ?

Не знаю.