В якому сенсі диференціальне числення на просторі — це СЛІД цього простору?

ПЛАН

1. Що таке простір? Для нас — ДГ категорія (більш обмежено: алгебра. Більш загально: кільцевий спектр або його категорне узагальнення (?))
2. Що таке диференціальне числення? Приклади:

   а) Форми (Де Рам)

   а') Форми (Де Рам-Вітт) коли $\mathrm{char}(k) = p > 0$.

   б) Некомутативне числення: циклічні гомології, Гохшільд...

б') Некомутативні диференціальні форми

в) ?

3 Що таке слід?

а) Слід матриці - число.
(слід ендоморфізму лінійного простору - число).

b) Слід ендоморфізму (нелінійного) простору (див. 1) - це комплекс лінійних просторів.
(Слід ендоморфізму алгебри - це просто лінійний простір).

A-алгебра; $a \in A \rightsquigarrow \tau(a)$
$\tau(ab) = \tau(ba)$ - слід на алгебрі.

$\mathcal{C}$-dg категорія; X-об'єкт; $f: X \circlearrowleft$ слід (f)?

1 ДГ категорії

$\mathcal{C}$ – дг кат.:

a) $x, y, \ldots$ ОБ'ЄКТИ

b) $\forall x, y \rightsquigarrow \mathcal{C}^\bullet(x,y)$ комплекс

$$\partial : \mathcal{C}^\bullet \to \mathcal{C}^{\bullet+1} \quad \partial^2 = 0$$

c) $\forall x, y, z$:

$$\cdot : \mathcal{C}^\bullet(x,y) \times \mathcal{C}^\bullet(y,z) \to \mathcal{C}^\bullet(x,z)$$

білінійне; однорідне ($C^p \times C^q \to C^{p+q}$)

АСОЦІАТИВНЕ

$$\partial(a \cdot b) = \partial a \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot \partial b$$

$a \in C^p(x,y) \rightsquigarrow |a| := p.$

c') $\mathbb{1}_x \in \mathcal{C}^0(x,x)$ одиниці. —

приклади

1) A - кільце   1 об'єкт $*$;

$$C^0(*,*) = A$$

$$C^{\neq 0} = 0 \quad \partial = 0$$

2) ДГ категорія з одним об'єктом $*$ — це ДГ АЛГЕБРА.

3). Комплекси k-модулів.

$$\underline{\mathrm{Hom}}^p(A^\bullet, B^\bullet) = \prod_j \mathrm{Hom}_k(A^j, B^{p+j})$$

$$\partial\varphi = [\partial, \varphi] = \partial_B \circ \varphi - (-1)^{|\varphi|} \varphi \circ \partial_A$$

4) ДГ модулі над ДГ алгеброю $C^\bullet$.

5) (пізніше): Внутрішній HOM двох ДГ категорій.

② Диференціальне числення.

а) Диф. форми: нехай A - комутативна алгебра над (ком. кільцем) k.

$\Omega^{\bullet}_{A/k}$ - це алгебра над k,

ТВІРНІ: i) наша алгебра A;

ii) символи da, $a \in A$, які є лінійними над k; $d1 = 0$;

Визначальні співвідношення:

$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db$$

☆ $a \cdot db = db \cdot a$; $da \cdot db + db \cdot da = 0$

Приклад $A = k[x_1, \dots, x_n]$,

$$\Omega^{\bullet}_{A/k} = A\{dx_1, \dots, dx_n\}$$

$$dx_j dx_k + dx_k dx_j = 0$$

$\deg(a)=0$; $\deg(da)=1$;

$$\Omega^{\bullet}_{A/k} = \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^{n}_{A/k}$$

$$d: \Omega^{\bullet}_{A/k} \to \Omega^{\bullet+1}_{A/k}$$

Визначене тим, що:

$$d: a \longmapsto da$$
$$da \longmapsto 0$$

$$d(\omega_1 \cdot \omega_2) = d\omega_1 \cdot \omega_2 + (-1)^{|\omega_1|} \omega_1 \cdot d\omega_2$$

Факт: $\boxed{d^2 = 0}$

<u>приклад</u>. $\mathbb{Q} \subset k$; $A = k[T]$

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1$$
$$T^n \longmapsto n T^{n-1} dT$$

$$\ker d = k \cdot 1$$
$$\operatorname{coker} d = 0$$

"Локально":

$$A = k[T_1, \dots, T_n]$$

$$H^0(d) = k\ ; \quad H^j(d) = 0,\ j > 0.$$

b) Випадок $k = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$.

$$A = k[T]$$

$$\begin{array}{rcll}
1 & \longmapsto & 0 & \\
T & \longmapsto & dT & \\
T^2 & \longmapsto & 2T\,dT & \\
\vdots & & & \\
T^p & \longmapsto & 0 & T^{p-1}dT \\
T^{p+1} & \longmapsto & & T^p dT \\
\vdots & & & \vdots \\
T^{2p} & \longmapsto & 0 & T^{2p-1}dT \\
\vdots & & & \vdots
\end{array}$$

$$\ker d = k[T^p]$$

$$\operatorname{coker} d = k[T^p] \cdot T^p \cdot \frac{dT}{T}$$

Згадаємо: для комутативного

A,

$$F : a \mapsto a^p$$

морфізм кілець

$$F(a+b) = F(a) + F(b)$$

Бачимо, що: $F : k[T] \to k[T]$

$$\begin{array}{ccc} & & \cup \\ k[T] & \xrightarrow{\sim} & \ker(d) \\ & & \parallel \\ & & H^0(d) \end{array}$$

Визначимо

$$F(aT^j dT) := a^p T^{pj} \cdot T^{p-1} dT$$

або:

$$F(f \cdot dT) = F(f) \cdot T^{p-1} dT$$

Ізоморфізм Карт'є:

$$F : \Omega^{\bullet}_{A/k} \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}(d)$$

$A = k[T]$; вірно для $k[T_1, \ldots, T_n]$ чи, більш загально, для <u>гладких</u> A.

Більш інваріантне визначення:

$$F: a \mapsto a^p \,;\; db \mapsto b^{p-1} db$$

Добре визначене тому що:

$$\begin{array}{ccc} d(ab) & \longmapsto & (ab)^{p-1} d(ab) \\ \parallel & & \parallel \\ da.b + a.db & \longmapsto & a^{p-1} b^p . da + \\ & & + a^p b^{p-1} . db \end{array}$$

Леми Пуанкаре немає; є ізоморфізм Карт'є. Є інше визначення форм, для яких лема Пуанкаре виконується

Більш про диференціальне числення для $\mathrm{char}(k)=p$: пізніше (комплекси де Рама-Вітта).

B) Некомутативні форми.

A – алгебра (можливо некомутативна).

$\Omega^\bullet_{A,NC}$:

твірні: i) наша алгебра A;

ii) символи da, $a\in A$, k-лінійні;

визначальні співвідношення:

$$d(ab)=da.b+a.db$$

$\deg(a)=0$; $\deg(da)=1$;

$$d:\Omega^\bullet_{A,NC}\to\Omega^{\bullet+1}_{A,NC}$$

$$d: a\mapsto da;\, da\mapsto 0$$

$$d(\omega_1\cdot\omega_2)=d\omega_1\cdot\omega_2+(-1)^{|\omega_1|}\omega_1\cdot d\omega_2$$

$$d^2 = 0$$

=

$$A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \Omega^n_{A,NC}$$

$$\bar{A} := A/k \cdot 1$$

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \longmapsto a_0 \cdot da_1 \cdot \ldots \cdot da_n$$

=

$$d : a_0 da_1 \ldots da_n \mapsto da_0 da_1 \ldots da_n$$

=

Диференціал d навіть не помічає <u>множення</u> в A.

$H^\bullet(d)$ тривіальне, тобто:

$$\Omega^\bullet_{k,NC} \xrightarrow{\sim} \Omega^\bullet_{A,NC}$$

ізоморфізм на рівні $H^\bullet(d)$.

=

Як це використати?

$$\phi : A \to A \qquad \phi_* : \Omega^\bullet_{A,NC} \to \Omega^\bullet_{A,NC}$$

$$id - \phi_* = d\iota_\phi + \iota_\phi d$$

$$\iota_\phi : \Omega^\bullet_{A,NC} \to \Omega^{\bullet-1}_{A,NC}$$

Коли шукаємо формулу для ι_ϕ, знаходимо що вона дається таким процесом:

$$\iota_\phi : \underset{\underset{\Omega^n_A}{\cap}}{a_0 da_1 \dots da_n} \longmapsto \sum_{j=1}^n (-1)^j a_0 da_1 \dots da_{j-1} (a_j \otimes 1 - 1 \otimes a_j) \cdot da_{j+1} \dots da_n$$

$$\omega_1 \otimes \omega_2 \in \sum_{k=0}^{n-1} \Omega^k_A \otimes \Omega^{n-k-1}_A$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\omega_1 \omega_2 - (-1)^{|\omega_1||\omega_2|} \phi_*(\omega_2) \cdot \omega_1 \in \Omega^{n-1}_A$$

Наприклад:

$$a_0 da_1 \longmapsto a_0 a_1 - \phi(a_1) \cdot a_0$$

Маємо

$$\iota_\phi^2 = 0$$

Випадок $\phi = id$: $\iota_\Delta := \iota_{id}$

$$\iota_\Delta (a_0 da_1 \dots da_n) = \sum_{j=1}^n \pm [a_j, da_{j+1} \dots da_n \cdot a_0 \cdot da_1 \dots da_{j-1}]$$

Диференціал Гінзбурга - Шедлера.

Ginzburg, Schedler, another dfn of cyclic homology

Бікомплекс:

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d, "d"] & \arrow[d, "d"] & \\
& \Omega^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"] & \Omega^3 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"] & \cdots \\
\Omega^0 \arrow[r, "d"] & \Omega^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"] & \Omega^2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"] & \cdots \\
& \Omega^0 \arrow[r] & \Omega^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\iota_\Delta"] & \cdots \\
& & \Omega^0 & \cdots
\end{tikzcd} \qquad (\star)$$

Гінзбург-Шедлер: (Періодичні) циклічні гомології, гомології Гохшільда усі обчислюються за допомогою цього бікомплексу.

Коли A - <u>комутативна</u> алгебра, маємо проекцію

$$\Omega^{\bullet}_{A,NC} \xrightarrow{Pr} \Omega^{\bullet}_{A/k}$$

$$a_0 da_1 \ldots \longmapsto a_0 da_1 \ldots$$

$$d \circ Pr = Pr \circ d$$

$$d \circ \iota_\Delta = 0 \circ d = 0$$

Наївно: це квазі-ізоморфізм,

$$\textcircled{A} \longrightarrow \begin{tikzcd} \Omega^0 \arrow[r] & \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \Omega^1 \arrow[d, "0"] \\ & \Omega^0 \arrow[r, "d"] & \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ & & \Omega^0 \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

для: а) вертикальних
б) тотальних комплексів.

ТРОШКИ ДЕЛІКАТНІШИЙ ВАРІАНТ Є ВІРНИМ. (Г-Ш)

③ Що таке сліди?

Слід $n \times n$ матриці

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, bend left, "a"] & m \arrow[l, bend left, "b"] \end{tikzcd} \qquad \operatorname{tr}_m(ab) = \operatorname{tr}_n(ba)$$

Слід на алгебрі A:

$$\tau : A/[A, A] \to k$$

тобто: $\tau : A \to k$ лін. $\tau(ab) = \tau(ba)$

Слід на (кін.) категорії C;

$$\tau_x : C(x, x) \to k \quad \forall x \text{ - об'єкт } C$$

слід на 2-категорії?

Наша 2-категорія:

АЛГЕБРИ

(пізніше: дг категорії).

Об'єкти: алгебри над k

морфізми: $\phi : A \to B$.

2-морфізми:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=50, "\phi"] \arrow[r, bend right=50, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b"] & B \end{tikzcd}$$

$b \in B$; $\phi(a)b = b\psi(a)$ $\forall a \in A$

Композиція:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=70, "\phi"] \arrow[r, "\psi" description] \arrow[r, bend right=70, "\theta"'] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \Downarrow b_1, \; \Downarrow b_2$$

$$b_1 \circ b_2 = b_1 b_2$$

$$\phi(a)b_1 b_2 = b_1 \psi(a) b_2 = b_1 b_2 \theta(a)$$

Бачимо, що $Hom(A,B)$ - категорія

$$\mathrm{Hom}_{alg}(A,B) =: C(A,B)$$

Маємо

Функтори

$$C(A,B)\times C(B,C)\to C(A,C)$$

на об'єктах:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] & B \arrow[r, "\psi"] & C \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\psi\circ\phi"] & & C \end{tikzcd}$$

На морфізмах:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\phi_1"] \arrow[r, bend right, "\phi_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b"] & B \arrow[r, bend left, "\psi_1"] \arrow[r, bend right, "\psi_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow c"] & C \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, bend left, "\psi_1\circ\phi_1"] \arrow[rr, bend right, "\psi_2\circ\phi_2"'] \arrow[rr, phantom, "\phi_1(b)c = c\phi_2(b) \quad \Downarrow"] & & C \end{tikzcd}$$

Висновок: Алгебри утворюють категорію в категоріях, або 2-категорію.

<u>Слід</u> $A \circlearrowleft \phi$

$TR_A(\phi)$ - k-модуль

$$TR_A(\phi) := A \Big/ \langle \phi(a)\cdot b - b\cdot a \mid a,b\in A \rangle$$

(Має аналітичний/фізичний зміст;

$$\tau(ab) = \tau(b\cdot \sigma_{it}(a))$$

$$\cdots$$

фактори типу III; KMS; ...

Властивості :

1) функторіальність

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\phi"] \arrow[r, bend right, "\psi"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a"] & A \end{tikzcd}$$

$\phi(a')\cdot a = a\cdot\psi(a')$
$\forall a'$

$$a_* : TR_A(\psi) \to TR_A(\phi)$$

$$a_0 \in TR_A(\phi) \overset{a_*}{\mapsto} a\cdot a_0$$

$$(ab)_* = a_* b_*$$

2)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\phi"] & B \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$$TR_A(\psi\phi) \xrightarrow{\sim} TR_B(\phi\psi)$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ a & \longmapsto & \phi(a) \\ \psi(b) & \longleftarrow & b \end{array}$$

$$a - \psi\phi(a) = 1\cdot a - \psi\phi(a)\cdot 1$$
$$b - \phi\psi(b) = 1\cdot b - \phi\psi(b)\cdot 1$$

Ці <u>ізоморфізми</u> теж функторіальні

Отримуємо:

i) Об'єкти: $A, B, \dots$

ii) <u>Категорія</u> $C(A,B)$

(об'єкти: $\phi, \psi, \dots$)

iii) <u>функтори</u>:

$$C(A,B)\times C(B,C)\to C(A,C)$$

асоціативне, ...

iv) функтор

$$TR_A : C(A,A)\to k\text{-mod}$$

v) ізоморфізми функторів:

$$\begin{tikzcd}
C(A,B)\times C(B,A) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[d] & & C(B,A)\times C(A,B) \arrow[d] \\
C(A,A) \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\tau_{A,B}"] & & C(B,B) \arrow[dl] \\
& k\text{-mod} &
\end{tikzcd}$$

vi)

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(A,B)\times\mathcal{C}(B,C)\times\mathcal{C}(C,A) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] \arrow[ddr, bend right] & \mathcal{C}(B,C)\times\mathcal{C}(C,A)\times\mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] \arrow[dd, bend left] & \mathcal{C}(C,A)\times\mathcal{C}(A,B)\times\mathcal{C}(B,C) \arrow[d] \arrow[ddl, bend left] \arrow[ll, bend left] \\
\mathcal{C}(A,A) \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow\ \tau_{A,B,C}"] & \mathcal{C}(B,B) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\Rightarrow\ \tau_{B,C,A}"] & \mathcal{C}(C,C) \arrow[dl] \arrow[ll, phantom, bend left, "\Rightarrow\ \tau_{C,A,B}"] \\
 & k\text{-mod} &
\end{tikzcd}
$$

$$\tau_{C,A,B} \cdot \tau_{B,C,A} \cdot \tau_{A,B,C} = \mathrm{id}$$

(2-категорія зі слідом)

Питання.

1) В якому сенсі "Вища версія" $TR_{id}(A)$ – це (узагальнені) диференціальні форми?

2) В якому сенсі аксіоми 2-категорії зі слідом виконуються для вищих версій a) $C(A,B)$ b) $TR_{id}(A)$?

2

Сліди і бімодулі.

Звідки взялася структура 2-категорії зі слідом на алгебрах?

① Алгебри — це категорії з одним об'єктом. Категорії утворюють 2-категорію:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=50, "\text{функтори}"] \arrow[r, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\ \text{природні перетворення функторів}"] & B \end{tikzcd}$$

② Алгебри утворюють 2-категорію (Моріта):

1-морфізми $A \to B$: бімодулі ${}_A M_B$

Композиція:

$${}_A M_B \circ {}_B N_C = {}_A \left(M \underset{B}{\otimes} N \right)_C$$

2-морфізми: морфізми бімодулів.

$$A \xrightarrow{\phi} B \rightsquigarrow M_\phi = {}_\phi B$$

морфізм алгебр

бімодуль

$$\begin{array}{c} {}_\phi B \\ \| \\ B \end{array}$$

$$a_1 \cdot b \cdot b_1 := \phi(a_1) b b_1$$

$$TR_A(M) := \left. M \middle/ [M, A] \right.$$

$$\| \!\!\!\!\!\! \text{ ї}$$

$$M \big/ \left\langle a \cdot m - m \cdot a \,\middle|\, \begin{array}{l} a \in A \\ m \in M \end{array} \right\rangle$$

Звичайно,

$$m \otimes n \longleftrightarrow n \otimes m$$

$$\left. M \otimes_B N \middle/ [A, \cdot] \right. \cong \left. N \otimes_A M \middle/ [B, \cdot] \right.$$

В якому сенсі диф. форми - це вищий слід?

Що значить: вища версія

$$A/[A,A] \ ?$$

① Вища бімодульна версія:

Для бімодуля ${}_A M_A$:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} P_1 \xrightarrow{\partial} P_0 \xrightarrow{\partial} M$$

резольвента вільними бімод.

Комплекс

$$\cdots \to P_2/[A,P_2] \xrightarrow{\partial} P_1/[A,P_1] \xrightarrow{\partial} P_0/[A,P_0]$$

рахує гомології Гохшільда

$$HH_j(A,M) = \mathrm{Tor}_j^{A\otimes A^{op}}(A,M)$$

Можна користуватися стандартним комплексом:

$$C_n(A,M) = M \otimes \bar{A}^{\otimes n} \qquad \bar{A} = A/k\cdot 1$$

$$b : C_n(A,M) \to C_{n-1}(A,M)$$

$$b(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}$$

$$a_0 \in M;\ a_1, \dots, a_n \in A$$

$$HH_0(A,M) \cong M/[A,M] = TR_A(M)$$

$C_\bullet(A,M)$ — "вищий слід" M,

або $TR_A^\bullet(M)$

Якщо ми віримо, що комплекси $TR^\bullet_A(M)$ задовольняють якимось аксіомам 2-категорії зі слідом:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "\phi"] & B \arrow[l, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} TR^\bullet_A(\psi\phi) \arrow[r, bend left, "\phi_*"] & TR^\bullet_B(\phi\psi) \arrow[l, bend left, "\psi_*"] \end{tikzcd}$$

не ізоморфізм, але гомотопічна еквівалентність.

$$\phi_*(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \phi a_0 \otimes \ldots \otimes \phi a_n$$

$$\psi b_0 \otimes \ldots \otimes \psi b_m = \psi_*(b_0 \otimes \ldots \otimes b_m)$$

Мусять існувати гомотопії:

$$B_{\psi\phi} : TR^\bullet_A(\psi\phi) \to TR^{\bullet-1}_A(\psi\phi)$$

$$B_{\phi\psi} : TR^\bullet_B(\phi\psi) \to TR^{\bullet-1}_B(\phi\psi)$$

$$id - \psi_* \phi_* = bB + Bb$$

...

Коли $A = B$, $\phi = \psi = id$:

$$0 = bB + Bb$$

$$B : TR^{\bullet}_{id}(A) \to TR^{\bullet-1}_{id}(A)$$

$$B^2 = 0.$$

і також:

<u>Тобто:</u> Додатковий диференціал

$$B : C_{\bullet}(A, A) \to C_{\bullet-1}(A, A)$$

$$B(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{nj} a_j \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_{j-1}$$

(Райнгарт і Конн – Б. Ц.)

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & {} \\
 & C_0 \arrow[r, "B"] & C_1 \arrow[r, "B"] \arrow[d, "b"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & {} \\
 & & C_0(A,A) \arrow[r, "B"] & C_1 \arrow[r, "B"] \arrow[d, "b"] & {} \\
 & & & C_0 & \ldots
\end{tikzcd}
$$

(Циклічний бікомплекс)

Теорема (HKR - Гохшільд - Костант - Розенберг; Конн)

Нехай A - гладка комутативна алгебра; $k \supseteq \mathbb{Q}$.

Відображення

$$a_0\otimes\dots\otimes a_n \longmapsto \frac{1}{n!}\, a_0\, da_1\dots da_n$$

$$C_n(A,A)\to \Omega^n_{A/k}$$

є квазі-ізоморфізмом і) вертикальних; іі) тотальних комплексів

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & C_3 \arrow[d] & & & \\
\cdots\; C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[d] & & & \\
 & C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[d] & & & \\
 & & C_0 \;\cdots & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega^0 \arrow[r] & \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \Omega^2 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & {} \\
 & \Omega^0 \arrow[r, "d"] & \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & {} \\
 & & \Omega^0 \arrow[r] & {} \\
 & & & \cdots
\end{tikzcd}$$

② Вища версія $A/[A,A]$

в категорії АЛГЕБР

(бі~~моду~~лів)

ДГА резольвента A:

$$\begin{array}{l} R_0 \xleftarrow{\partial} R_1 \xleftarrow{\partial} R_2 \xleftarrow{\partial} \cdots \\ \downarrow \\ A\ (\leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \cdots) \end{array}$$

морфізм дга; епіморфізм;

квазі-ізоморфізм (тобто:

$$R_0/\partial R_1 \xrightarrow{\sim} A;$$

$$H_i(\partial) = 0, \ i > 0.$$

Комплекс

$$R_\bullet / [R_\bullet, R_\bullet], \partial$$

<u>Теорема</u> (Фейгін–Б.Ц.) Гомології цього комплексу – це <u>майже</u> циклічні гомології.

Точніше:

$$CC_\bullet(A) := \begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] \\ C_0 \arrow[r, "B"] & C_1 \arrow[r, "B"] \arrow[d, "b"] & C_2 \arrow[d, "b"] \\ & C_0 \arrow[r, "B"] & C_1 \arrow[d, "b"] \\ & & C_0 \end{tikzcd}$$

$$R_\bullet \big/ [R_\bullet, R_\bullet] + k \simeq CC_\bullet(A) \big/ CC_\bullet(k)$$

Висновок: коли $\mathbb{Q} \subset k$,
"вищі сліди" – це узагальнення диференціальних форм.

Інші сліди (в характеристиці $p>0$).

1) k - поле; $p=0$ M - векторний простір над k.

$$TR^{(1)}(M) = M^{\otimes p} \big/ \mathbb{Z}/p$$

(циклічна група $\mathbb{Z}/p$ діє на $M^{\otimes p}$ перестановками множників).

$$M \xrightarrow{\phi} TR^{(1)}(M)$$
$$m \longmapsto m \otimes \dots \otimes m$$

Лема (Калєдін; ...)

$$\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)$$
$$\phi(\alpha m) = F(\alpha) \cdot \phi(m)$$
$$(F(\alpha) := \alpha^p)$$

Крім того:

Приклад. $p=2$:

$$(w_1+w_2)^{\otimes 2} = w_1\otimes w_1 + w_2\otimes w_2 + \underbrace{w_1\otimes w_2 + w_2\otimes w_1}_{\parallel}$$

$$(w_1\otimes w_2 - w_2\otimes w_1) + \cancel{2w_1\otimes w_2}$$

Доведення використовує простоту p (усі орбіти $\mathbb{Z}/p$ мають або один елемент, або p).

(Маємо нове твердження про біном Ньютона:

$$(a+b)^p = a^p + b^p + p\ldots + \sum [x_j, y_j]$$

в будь-якій алгебрі A.

2) A — k-алгебра; $p=0$ в k

${}_AM_A$ бімодуль.

Зауважимо що $\mathbb{Z}/p$ діє на

$$TR_A(\underbrace{M \otimes_A M \otimes_A \dots \otimes_A M}_{p \text{ разів}}) =$$

$$= M \otimes_A \dots \otimes_A M / [A, -]$$

$$TR^{(1)}_A(M) := TR_A(M \otimes_A \dots \otimes_A M) / \mathbb{Z}/p$$

<u>Лема</u> (Каледін)

$$TR_A(M) \xrightarrow{\phi} TR^{(1)}_A(M)$$

$$m \overset{\phi}{\longmapsto} m \otimes \dots \otimes m$$

F-лінійне / k;

$$TR^{(1)}_A(M \otimes_B N) \simeq TR^{(1)}_B(N \otimes_A M)$$

задовольняє усім аксіомам, крім: $TR^{(1)}_A(M_1 \oplus M_2) = TR^{1}_A(M_1) \oplus TR^{1}_A(M_2)$

Ідея Калєдіна:

Застосовувати вищі версії $TR_A^{(1)}, \ldots$ для побуддування некомутативного диференціального числення в характеристиці p.

Наступне питання

"Вищий аналог" 2-категорії зі слідом, яку утворюють алгебри (чи, більш загально, ДГ категорії).

Вищі $TR_A(M) : C_\bullet(A, M)$

Вищі $C^\bullet(A, B)$:

Будемо обмежуватися тільки

бімодулями ${}_{\varphi}B$, де $A \xrightarrow{\varphi} B$ – морфізм.

Когомології Гохшільда:

Для A-бімодуля M,

$$C^n(A, M) = \mathrm{Hom}_k(\bar{A}^{\otimes n}, M)$$

$$(\delta D)(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_1 D(a_2, \dots, a_{n+1})$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^j D(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots, a_{n+1})$$
$$+ (-1)^{n+1} D(a_1, \dots, a_n) a_{n+1}$$

$$\delta : C^n \to C^{n+1}; \ \delta^2 = 0$$

Когомології цього комплексу – це когом. Гохшільда

$$HH^\bullet(A, M) =$$
$$= \mathrm{Ext}^\bullet_{A \otimes A^{op}}(A, M)$$

Для двох морфізмів алгебр

$$A \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} B$$

позначимо через ${}_{\phi}B_{\psi}$

A-бімодуль, рівний B як

k-модуль, такий, що

$$a_1 \cdot b \cdot a_2 = \phi(a_1)\, b\, \psi(a_2)$$

<u>Лема</u>

$$\mathrm{Ext}^{\bullet}_{A \otimes B^{op}}\left({}_{\psi}B, {}_{\phi}B\right) \cong$$

$$\cong HH^{\bullet}\left(A, {}_{\phi}B_{\psi}\right)$$

Питання: яким аксіомам "вищої 2-категорії зі слідом" задовольняють комплекси

$$C^\bullet(A, {}_\phi B_\psi) \quad ; \quad C_{-\bullet}(A, {}_\phi B)$$

?

(Ко)ланцюги Гохшільда

A дга над k; $1 \in k$, ком.

$$\partial_A : A^{\cdot} \to A^{\cdot+1}$$

$$A^{\cdot}[1] = A^{\cdot+1}$$

Коли A - просто алгебра, $A[+1]$ зосереджена в розмірності $-\underline{1}$.

$$\mathrm{Bar}(A) = \bigoplus_{n \geq 1} A[1]^{\otimes n}$$

(ко)вільна <u>коалгебра</u> з (ко)твірними $A[1]$.

Кодиференціювання

$$\partial : \mathrm{Bar}(A) \xrightarrow[\text{степ.}+1]{} \mathrm{Bar}(A)$$

Визначене тим, що:

$$\bigoplus A[1]^{\otimes n} \longrightarrow \bigoplus A[1]^{\otimes n} \xrightarrow{\mathrm{proj}} A[1]$$

$$(a_1|\dots|a_n) \longmapsto \begin{cases} (-1)^{|a_1|} a_1 a_2, & n=2 \\ \partial_A a_1, & n=1 \\ 0, & n>2 \end{cases}$$

$$\partial = \partial_A + \partial_{Bar}$$

$$\partial^2 = 0$$

Узагальнення: $m_n : A[+1]^{\otimes n} \to A[1]$

степені 1

(тобто $A^{\otimes n} \to A$ степені $n-2$)

Кодиференціювання, визначене тим, що

$$(a_1|\dots|a_n) \mapsto m_n(a_1, \dots, a_n),\ n>0$$

Якщо

$$\partial^2 = 0,$$

отримуємо A_∞ алгебру.

Маємо

$$Bar : dg\text{-}Alg \to dg\text{-}Coalg$$

і дуально:

$$Cobar : dg\text{-}Alg \leftarrow dg\text{-}Coalg$$

Дг коалгебра $C \rightsquigarrow$

$$Cobar(C) = \prod_{n \geq 1} C[-1]^{\otimes n}$$

Якщо

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i''$$

$$\partial : (c) \longmapsto (\partial_C c) + \sum_i (-1)^{c_i'} (c_i') \cdot (c_i'')$$

розповсюджується до диференціювання степеню 1

$$\partial^2 = 0$$

1) $Cobar(Bar(A)) \xrightarrow{\sim} A$

На твірних:

$(a_1 | \ldots | a_n) \longmapsto a_1, \quad n = 1; \; 0, \; n > 1.$

Дуально:

2) $C \xrightarrow{\sim} Bar(Cobar(C))$

1) – морфізм ДГ алгебр

2) – морфізм ДГ коалгебр

квазі-ізоморфізми. (припущення: C <u>конільпотентна</u>)

Для dg (ко)категорій: 4

Bar $A^{\cdot}$ — кокатегорія; $Ob = Ob(A)$

$$Bar(A)(x,y) = \bigoplus_{\substack{n\geq 0\\ x_1,\dots,x_n\in Ob(A)}} A^{\cdot}(x,x_1)[1]\otimes A^{\cdot}(x_1,x_2)[1]\otimes\dots\otimes A^{\cdot}(x_n,y)[1]$$

$$Cobar(C)(x,y) = \prod_{\substack{n\geq 0\\ x_1,\dots,x_n\in Ob(A)}} C(x,x_1)[-1]\otimes\dots\otimes C(x_n,y)[-1]$$

$$Bar : dg\text{-}Cat \rightleftarrows dg\text{-}Cocat_{conilp} : Cobar$$

(Ко)ланцюги Гохшільда dg категорій.

$$Bar_+(A) := k\oplus Bar(A)$$

$$Cobar^+(A) := k\oplus Cobar(A)$$

$M^{\bullet}$ ДГ бімодуль над A

$$C^{\bullet}(A, M) = \prod_{n \geq 0} \underline{\mathrm{Hom}}_k\left(A[1]^{\otimes n}, M\right)$$

$$\begin{aligned}(\delta\varphi)(a_1, \dots, a_{n+1}) &= \pm a_1 \varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) \\ &+ \sum_j \pm \varphi(a_1, \dots, a_j a_{j+1}, \dots) \pm \varphi(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} \\ &+ \sum \pm \varphi(a_1, \dots, \partial_A a_j, \dots, a_n) + \\ &+ \partial_M \varphi(a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

Як знайти цю формулу?

$$C^{\bullet}(A, A) = \mathrm{Coder}\,\mathrm{Bar}(A)$$

$$\varphi_n : A[1]^{\otimes n} \to A \mid n \geq 0$$

$$\updownarrow$$

єдине кодиференціювання, дир

якого

$$\mathrm{Bar}(A) \longrightarrow \mathrm{Bar}(A) \xrightarrow{\mathrm{proj}} A[1]$$

$$(a_1|\dots|a_n) \longmapsto \varphi_n(a_1,\dots,a_n)$$

$$\forall n$$

Скобка Герстенхабера:

$$\varphi \circ \psi \mp \psi \circ \varphi$$

на $\mathrm{Coder}(\mathrm{Bar}(A))$

$$m_2(a_1, a_2) := (-1)^{|a_1|} a_1 a_2$$

$$m_1(a_1) := \partial a_1$$

$$m = m_1 + m_2$$

$$\delta = [m, -]$$

Ті ж самі формули для загального M.

$$\varphi : A[1]^{\otimes n} \to A$$

$$\psi : A[1]^{\otimes m} \to A$$

$$\varphi\{\psi\}(a_1, \dots, a_{n+m-1}) =$$

$$= \sum \pm \varphi(a_1, \dots, \psi(a_{j+1}, \dots, a_{j+m}), \dots)$$

$$[\varphi, \psi] = \varphi\{\psi\} - (-1)^{(|\varphi|-1)(|\psi|-1)} \psi\{\varphi\}$$

$\Rightarrow$

ДГ алгебра Лі

$$C^{\bullet+1}(A, A),\ \delta,\ [\,,\,]$$

$\Rightarrow$

Ланцюги Гохшільда:

$$C_\bullet(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^\bullet \otimes A[1]^{\otimes n}$$

$$b(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \pm a_0 \otimes \dots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \dots \otimes a_n$$

$$\pm a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} + \partial_M a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \pm a_0 \otimes \dots \otimes \partial_A a_j \otimes \dots \otimes a_n$$

Для ДГ категорій:

Бімодуль над A: Комплекси

$M(x, y)$,

$$C^\bullet(A, M) = \prod_{\substack{n \geq 0 \\ x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathrm{Ob}(A)}} \mathrm{Hom}\big(A(x_0, x_1)[1] \otimes \dots \otimes A(x_n, x_{n+1})[1], M(x_0, x_{n+1})\big)$$

Щодо ланцюгів:

$$C_\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \bigoplus_{\substack{n \geq 0 \\ x_0, \dots, x_n}} \mathcal{M}(x_0, x_1) \otimes \mathcal{A}(x_1, x_2)[1] \otimes \dots \otimes \mathcal{A}(x_n, x_0)[1]$$

<u>Зручніше</u>: замість $\mathcal{A}(x,y)[1]$

$\overline{\mathcal{A}}(x,y)[1]$, де

$$\overline{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} \mathcal{A}(x,y), & x \neq y \\ \mathcal{A}(x,x) / k \cdot 1_x, & x = y \end{cases}$$

(<u>нормалізовані</u> (ко)ланцюги).

формули для диференціалів

$\delta : C^\bullet \to C^{\bullet+1}$ і $C_\bullet \xrightarrow{b} C_{\bullet-1}$

такі ж самі.

Завжди:

$$C_p := C^{-p}$$

Для звичайної алгебри A: [10]

$$M \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\bar{A}, M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}(\bar{A}^{\otimes 2}, M) \to$$

$$m \longmapsto [\_, m]$$

$$\varphi : \bar{A} \to M \longmapsto (\delta\varphi)(a_1, a_2) =$$

$$= a_1 \varphi(a_2) - \varphi(a_1 a_2) + \varphi(a_1) a_2$$

$$HH^0(A, M) = \mathrm{Center}(M) = \{ m \mid am = ma, \forall a \}$$

$$HH^1(A, M) = \mathrm{Der}(A, M) / \mathrm{Der}_{in}(A, M)$$

також:

$HH^2(A, M) = \{$класи ізоморфізму деформацій A за допомогою ідеалу квадрата нуль, який $\simeq M$ як A-бімодуль$\}$

(Добуток на $A \dotplus M$:

$$(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) = a_1 a_2 + (a_1 m_2 + m_1 a_2 + \varphi(a_1, a_2))$$

Ланцюги:

$$\longrightarrow M\otimes A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} M\otimes A \xrightarrow{b} M$$

$m\otimes a \mapsto ma - am$

$$HH_0(A, M) = M / [A, M]$$

ДГ категорії $C^\bullet(A, B)$

Об'єкти: $f : A \to B$

(насправді: A_∞ функтори)

$$C^\bullet(A,B)(f,g) = C^\bullet(A, {}_fB_g)$$

$${}_fB_g = B;\ a_1 \cdot b \cdot a_2 = f(a_1) b g(a_2)$$

Композиція:

$$C^\bullet(A, {}_fB_g) \otimes C^\bullet(A, {}_gB_h) \to C^\bullet(A, {}_fB_h)$$

$\varphi : A^{\otimes n} \longrightarrow B \qquad \psi : A^{\otimes m} \to B$

$$(\varphi \cup \psi)(a_1, \dots, a_{n+m}) = \pm \varphi(a_1, \dots, a_n)\psi(a_{n+1}, \dots, a_{n+m})$$

Зауваження.

A_∞ морфізм ДГА $A^\cdot \to B^\cdot$:

$Bar(A^\cdot) \to Bar(B^\cdot)$ морфізм ДГ коалг.

Або:

$f \in C^\bullet(A,B)$ $\quad \delta f + f \cup f = 0$

$f_n : A^{\otimes n} \to B$, $n \geq 1$, задовольняє тотожностям...

A_∞ <u>функтор</u> $A^\cdot \to B^\cdot$: $f : Ob(A) \to Ob(B)$

$f_n : A(x_0, x_1) \otimes \dots \otimes A(x_{n-1}, x_n) \to B(fx_0, fx_n)$

ті ж самі тотожності.

(Або: ДГ (ко?) функтор

$Bar(A) \longrightarrow Bar(B)$).

Про гомотопічну алгебру ДГ категорій

(техніка, яка дозволяє:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d] \\ A \end{tikzcd} \text{ – резольвента} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[rr, dashed, bend left, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & S \arrow[ll, dashed, "\sim"] \arrow[dl, "\sim"] \\ & A & \end{tikzcd} \quad \dots$$

(для двох резольвент)

Випадок ДГ алгебр: (Квіллен)

Розшарування: $A \twoheadrightarrow B$ (сюр'єктивні)

" $\twoheadrightarrow$ "

Слабкі еквіваленості: $A \xrightarrow{\sim} B$ (квазі-ізоморфізми)

" $\xrightarrow{\sim}$ "

Корозшарування:

" $\rightarrowtail$ "

$$\forall$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail] & A_1 \arrow[d, two heads, "\wr"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & B_1 \end{tikzcd}$$

Властивість підйому зліва

Більш конструктивно:
Елементарний крок - додати декілька нових вільних змінних, диференціали яких:

$$dx^{\text{нові}} \subset A \langle x^{\text{попередні}} \rangle$$

Корозшарування: отримати B з A за допомогою елементарних кроків; будьякий $\boxed{\text{ретракт}}$ такого.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] \arrow[u, bend left] & B' \arrow[u, bend left] \end{tikzcd} \quad \Omega \ \text{id}$$

Для ДГ категорій: було б те ж саме, якби усі вони мали ті ж самі об'єкти, і f було б тотожністю (чи біекцією) на об'єктах.

Гомотопічна категорія $H^0(\mathcal{A})$ (чи $Ho(\mathcal{A})$)

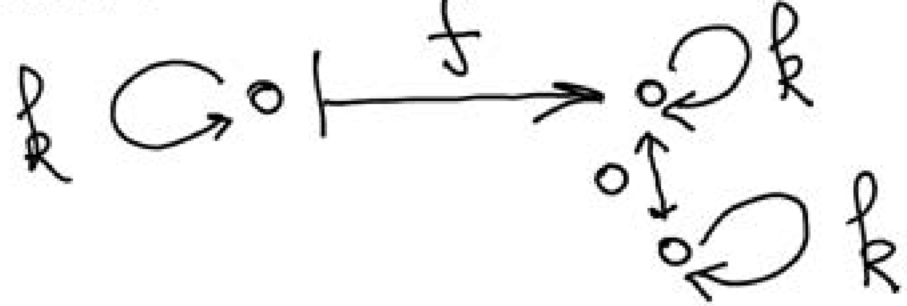
$$H^0(\mathcal{A})(x,y) := H^0(\mathcal{A}^\bullet(x,y))$$

Розшарування: $f: \mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$

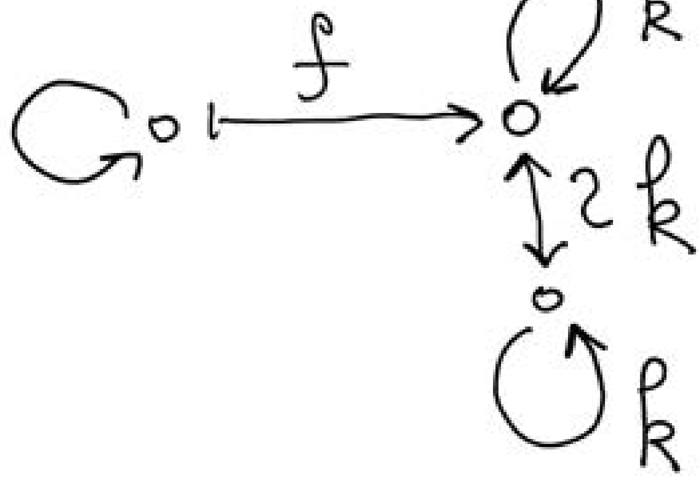
1) $\mathcal{A}^\bullet(x,y) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{B}^\bullet(fx, fy)$

2)
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] & f(x) \\ \exists\, y \arrow[u, "\wr\ \text{в}\ H^0(\mathcal{A}^\bullet)"'] \arrow[r, mapsto] & z \arrow[u, "\wr\ \text{в}\ H^0(\mathcal{B}^\bullet)"'] \end{tikzcd}$$

Приклад:

1


Контрприклад:

2


Слабкі еквівалентності:

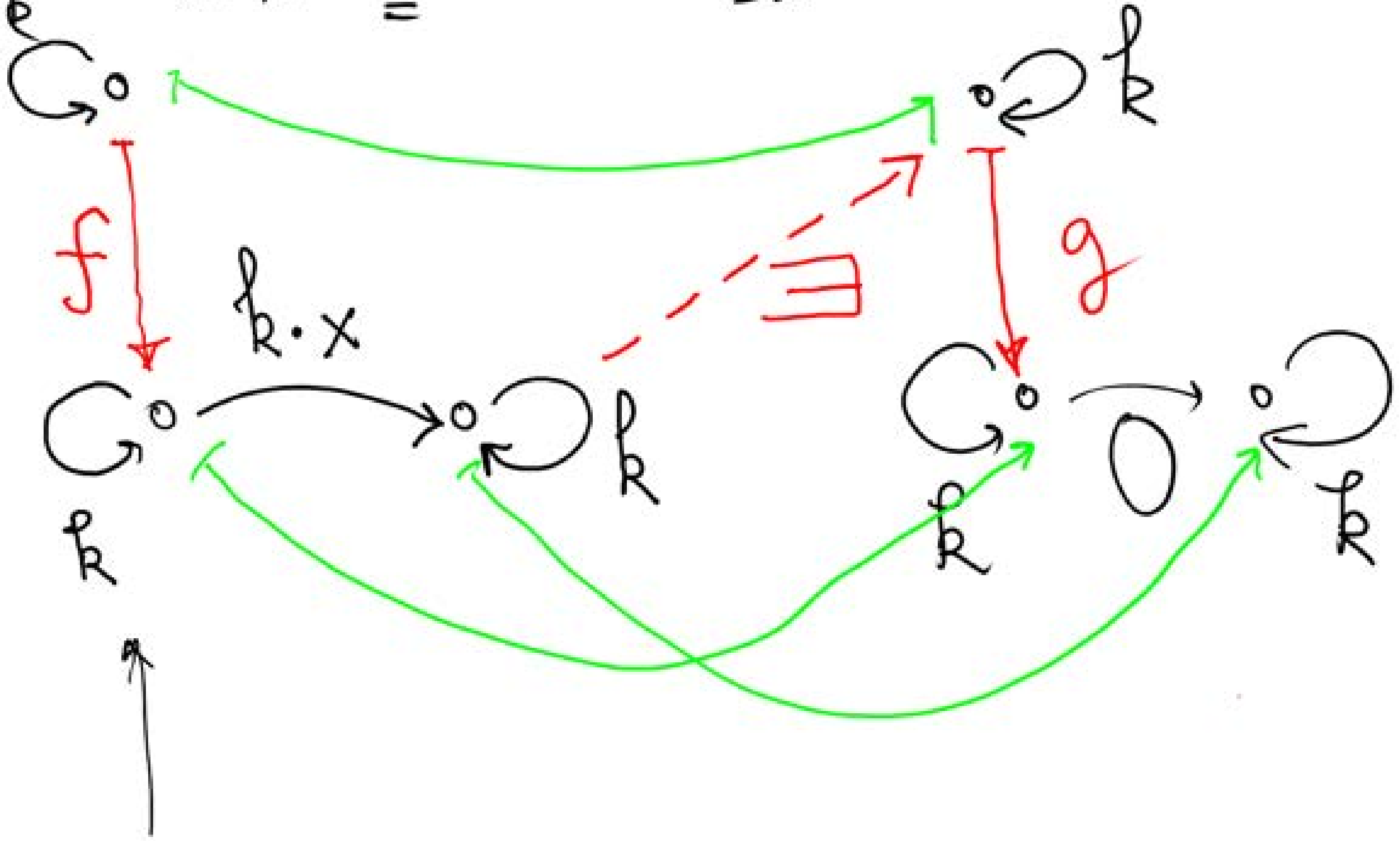
1) $A^{\bullet}(x,y) \xrightarrow[\text{quis}]{\sim} B^{\bullet}(fx,fy)$

2) $$\begin{array}{ccc} Ob(H^0(A)) & \xrightarrow{f} & Ob(H^0(B)) \\ \parallel & & \parallel \\ Ob(A) & & Ob(B) \end{array}$$

істотно сюр'єктивний

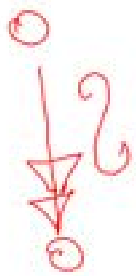
приклад: 2 контрприклад: 1

<u>Приклад.</u> Якщо було б розшару-ванням і сл. екв.:



f не було б корозшару-ванням.

Корозшарування: визначене властивістю підйому зліва для



Теорема (Табуада). $DGCat$ – замкнена модельна категорія.

<u>Вправа</u>

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd}$$

$$\downarrow f$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop left, "k"'] \arrow[r, bend left, "k\cdot x"] & \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd} \quad -$$

це корозшарування.

Так саме як

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop left, "k"'] \arrow[r, leftrightarrow, "0"'] & \circ \arrow[loop right, "k"] \end{tikzcd}$$

<u>Вправа</u>. Якщо $f : \xrightarrow{\sim}\!\!\!\!\rightarrow$, то:

$f : Ob\, A \twoheadrightarrow Ob\, B$; $Z^n A(x,y) \twoheadrightarrow Z^n B(fx, fy)$

18

ДГ категорія шляхів:

$$A^{\Delta^1} = A * \underbrace{C^\bullet(\Delta^1)}_{\text{коланцюги}, \cup}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}e_0 \oplus \mathbb{Z}e_1 \arrow[d, "d"'] & 0 \\ \mathbb{Z}\varepsilon & 1 \end{tikzcd}$$

$e_0^2 = e_0$

$e_1^2 = e_1$

$e_0 e_1 = e_1 e_0 = 0$

$e_0 \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon e_1$

$\varepsilon e_0 = 0 = e_1 \varepsilon$

Тепер маємо можливість говорити про гомотопні дг функтори:

$$A \to B^{\Delta^1} \underset{ev_1}{\overset{ev_0}{\rightrightarrows}} B$$

І про резольвенти:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "\wr"] \\ A_0 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & A \end{tikzcd}$$

Дві резольвенти є гомотопічно еквівалентними, тощо.

—

Якщо я вірно розумію: dgCat – не те, що називається симпліціальною модельною категорією.

Поки що маємо:

Дг категорії A, B

$\rightsquigarrow$

Дг категорія $C^\bullet(A,B)$

Хотіли б:

$$C^\bullet(A,B)\otimes C^\bullet(B,C)\to C^\bullet(A,C)$$

dg функтор, асоціативний...

Насправді маємо A_∞ функтор...

Могли б шукати якихось вищих співвідношень асоціативності для цих A_∞ функторів, ... Але ми обираємо дещо інший шлях.

Операції brace і морфізм [20]

$$\mathrm{Bar}\,C(A,B) \otimes \mathrm{Bar}\,C(B,C) \to$$
$$\to \mathrm{Bar}\,C(A,C)$$

1. "Некомутативні диференціальні оператори" на лінійному просторі.

V — (градуйований) лінійний простір. $T(V) = \bigoplus_{n>0} V^{\otimes n}$

0) Кожне лінійне відображ.

$D: V \to V \rightsquigarrow$ диференціювання

$$\partial_p(D) : T(V) \to T(V)$$

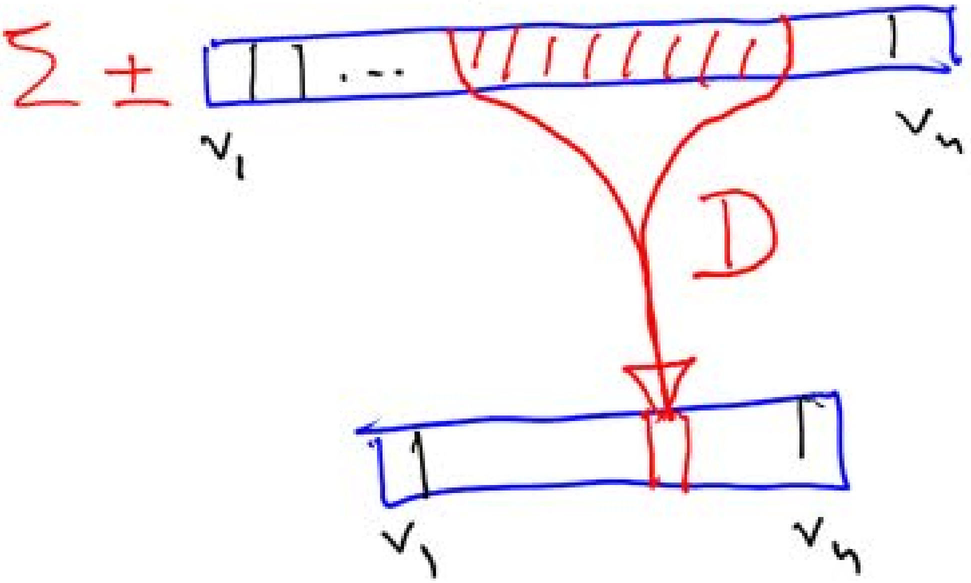
$$v_1 \ldots v_n \mapsto \sum_{k=1}^{n} \pm v_1 \ldots D(v_k) \ldots v_n$$

1) Кожне мультилінійне

$$D : V^{\otimes l} \to V$$

$$\mathrm{Op}(D): T(V) \to T(V)$$

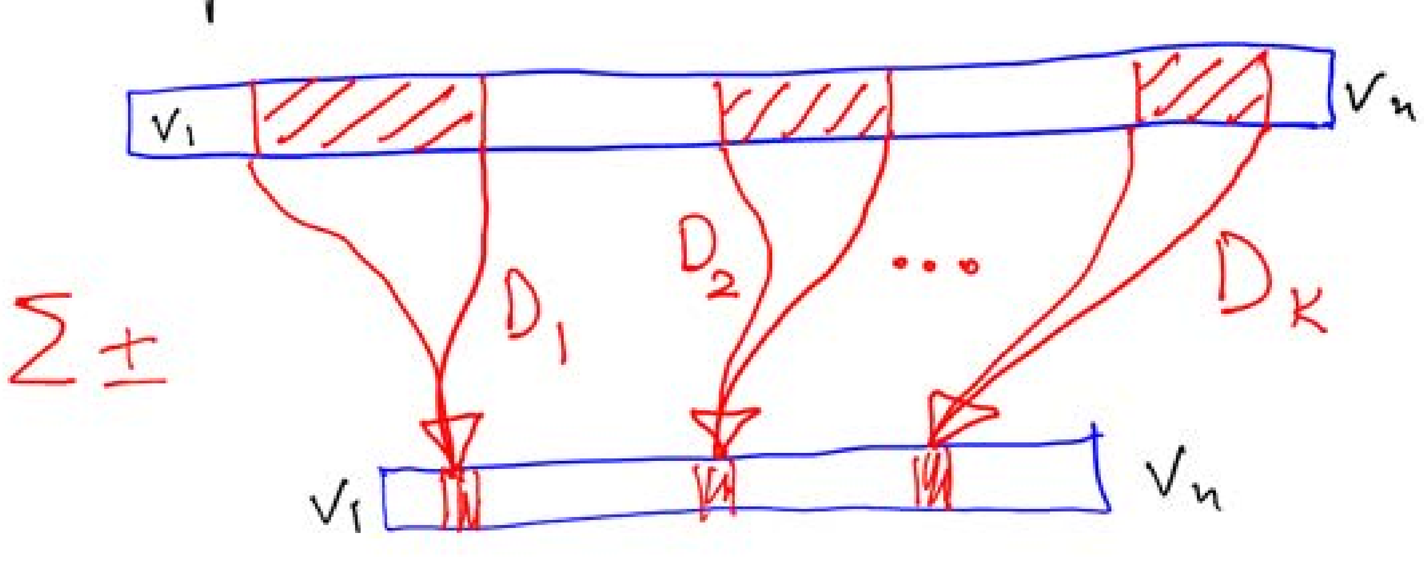
$$v_1 \dots v_n \mapsto \sum_{j=0}^{n-\ell} \pm\, v_1 \dots D(v_{j+1}, \dots, v_{j+\ell}) \dots v_n$$



Більш того, декілька

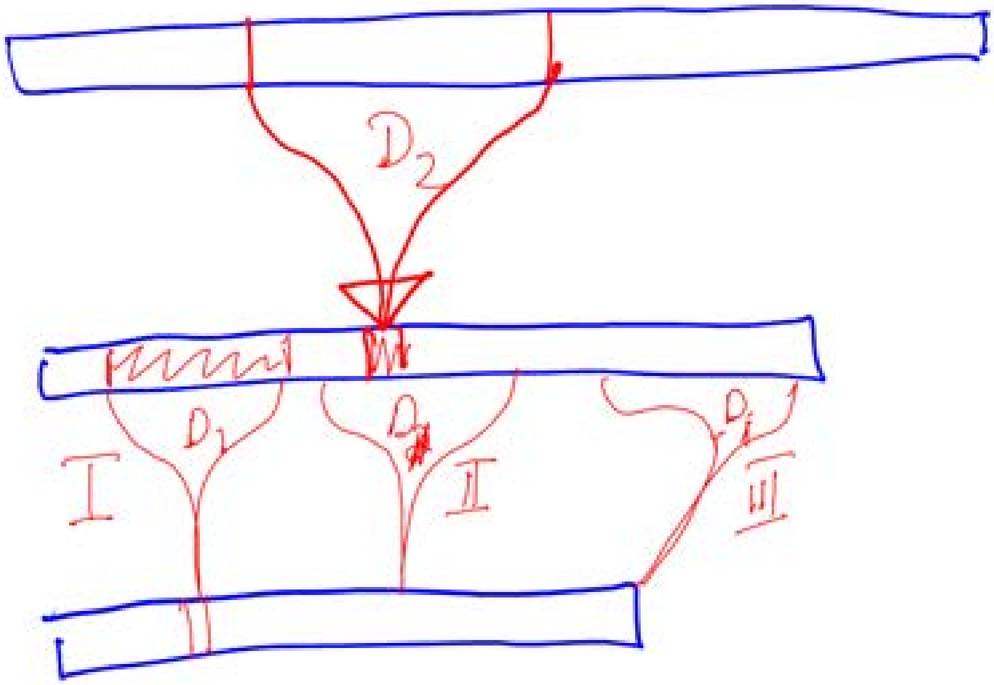
$$D_k : V^{\otimes \ell_k} \to V, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

$$\mathrm{Op}(D_1, \dots, D_k) : TV \to TV$$



Лінійна оболонка таких операторів $T(V)$ замкнена відносно композиції:

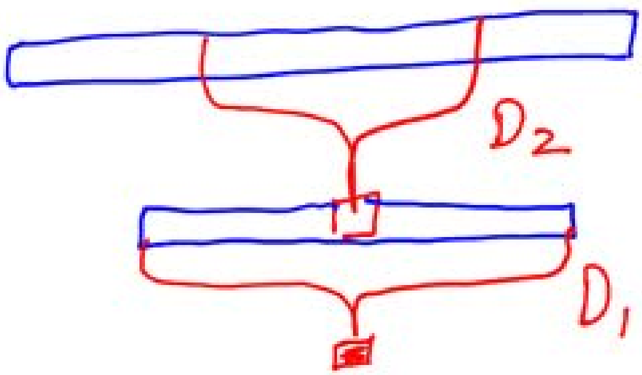
$$Op(D_1) \circ Op(D_2) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$



$$\mathrm{I} = \pm Op(D_1, D_2) \qquad \mathrm{II} = \pm Op(D_2, D_1)$$

$$\mathrm{III} = \pm Op(D_1\{D_2\})$$

$D_1\{D_2\}$:



$D_1 : V^{\otimes n_1} \to V \quad D_2 : V^{\otimes n_2} \to V$

$D_1 \circ D_2 : V^{\otimes (n_1 + n_2 - 1)} \to V$

Маємо асоціативну алгебру

$\mathrm{Tens}^*(\mathrm{Hom}(V^{\otimes \bullet}, V))$ $(\star)$

$* > 0 \; ; \; \bullet \geqslant 0$

Ця алгебра діє на $T(V)$

"Н.К. диф. операторами".

Тепер:

$$V = A[1]$$

$\mathrm{Hom}(A[1]^{\otimes \bullet}, A[1]) = C^\bullet(A, A)[1]$

$$(\ast) = \mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)$$

$$(\varphi_1|\dots|\varphi_n)\bullet(\psi_1|\dots|\psi_m) =$$

$$= (\varphi_1|\dots|\underbrace{\varphi_{n_1}|\dots}|\dots|\underbrace{\varphi_\cdot|\dots}|\dots|\underbrace{\varphi_\cdot|\dots|\varphi_\cdot})$$

$$\sum \pm (\varphi_1|\dots|\psi_1|\varphi_\cdot|\dots|\psi_2|\dots|\psi_m|\dots)$$

$$= \sum \pm (\varphi_1|\dots|\psi_1\{\varphi_{i_1+1},\dots\}|\dots|\psi_2\{\varphi_{i_2+1},\dots\}|\dots)$$

(Getzler–Jones; Gerstenhaber–Voronov) '94

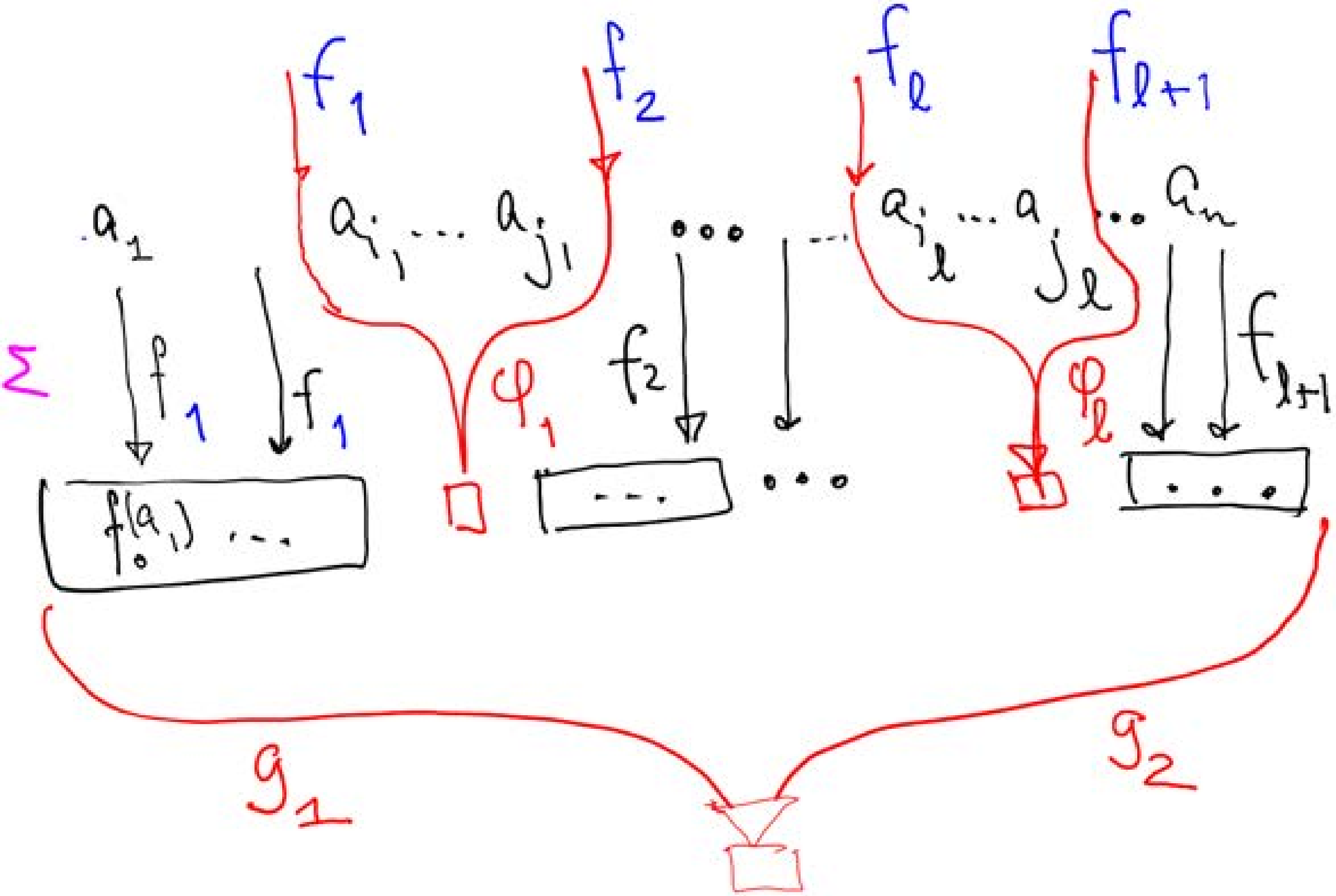
Факт: це морфізм ДГ коалгебр

$$\boxed{\begin{matrix}(\Phi\bullet\Psi)\bullet\Theta \\ \shortparallel \\ \Phi\bullet(\Psi\bullet\Theta)\end{matrix}}$$

$$\mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)^{\otimes 2} \to \mathrm{Bar}\,C^\bullet(A,A)$$

Для ДГ категорій:

$\psi\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$:

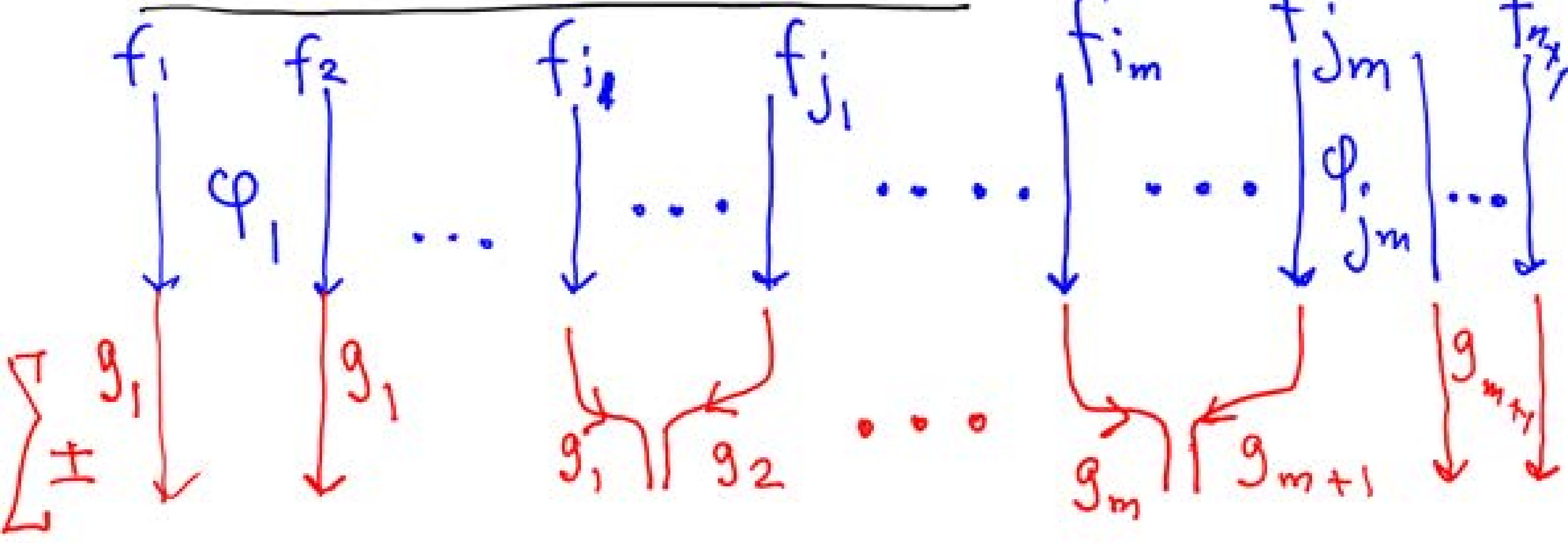


$\varphi_1 \in C^\bullet(A, {}_{f_1}B_{f_2}) \dots \varphi_\ell \in C^\bullet(A, {}_{f_\ell}B_{f_{\ell+1}})$,

$\psi \in C^\bullet(B, {}_{g_1}C_{g_2})$

$\psi\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\} \in C^\bullet(A, {}_{g_1 f_1}C_{g_2 f_{\ell+1}})$

Таким же чином:



$$\Big(g_1\circ\varphi_1 \,\Big|\, g_1\circ\varphi_2 \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \psi_1\{\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{j_1}\} \,\Big|\, \dots \,\Big|\, \psi_m\{\varphi_{i_m},\dots,\varphi_{j_m}\} \,\Big|\, \dots \, g_{m+1}\circ\varphi_n\Big)$$

$$\mathrm{Bar}\, C^\bullet(A,B)(f_1, f_{n+1})$$

$$\otimes$$

$$\mathrm{Bar}\, C^\bullet(B,C)(g_1, g_{m+1})$$

$$\downarrow$$

$$\mathrm{Bar}\, C^\bullet(A,C)(g_1 f_1, g_{m+1} f_{n+1})$$

Морфізм ДГ кокатегорій

Висновок:

$$\mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,B) \otimes \mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(B,C)$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,C)$$

$$\mathrm{Bar}(A) \otimes \mathrm{Bar}\, C^{\bullet}(A,B)$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Bar}(B)$$

Морфізми $\Leftrightarrow$ ДГ кокатег.;

Все асоціативне.

∞-категорії

① Квазі-категорії

Маємо справжню категорію

$\mathcal{C}$:

$$N_n\mathcal{C} = \left\{ i_0 \to i_1 \to \dots \to i_n \right\}$$

$i_0, \ldots \in Ob(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ s_0 \curvearrowright \; \downarrow d_0 \; \downarrow d_1 \; \downarrow d_2 \; \curvearrowleft s_1 \\ N_1\mathcal{C} \\ s_0 \curvearrowright \; \downarrow d_0 \; \downarrow d_1 \\ N_0\mathcal{C} \end{array}$$

симпліціальне множина.

Або: $[n]_\Delta = \{0 \to 1 \to \dots \to n\}$

$$N_n\mathcal{C} = \mathrm{Funct}([n]_\Delta, \mathcal{C})$$

Δ : об'єкти $[n]$, $n \geq 0$

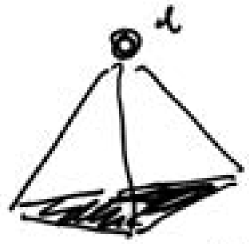
$[n] \to [m]$: $\mathrm{Funct}([n]_\Delta, [m]_\Delta)$

$N_\bullet C$ – сімпліціальна множина,

або

$$N_\bullet C : \Delta^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$\Delta^n := N[n]_\Delta$$

$\Lambda^n_i = \partial \Delta^n$ без 

$\partial_i \Delta^n$

(формальне визначення: ...)

$N_\bullet C$ задовольняє:

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & X_\bullet \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} \qquad \boxed{0 < i < n}$$

Такі $X_\bullet$ – квазікатегорії (Joyal). Це один з підходів до ∞- (або $(\infty,1)$) – категорій.

Якщо ☆ виконується для будьякого $0 \leq i \leq n$, то $X_\bullet$ – комплекс Кана. Якщо C – групоїд, то $N_\bullet C$ – комплекс Кана.

2 Сімпліціальні категорії.

Категорії, збагачені сімпліц. множинами, тобто:

Об'єкти: $x, y, \ldots$

$C_\bullet(x,y)$ – Δ°-множ.;

$$C_\bullet(x,y)\times C_\bullet(y,z)\to C_\bullet(x,z)$$ 31

асоц.; $1_x \in C_0(x,x)$; ...

Друге визначення $(\infty,1)$-кат.:

$C_\bullet$ де усі $C_\bullet(x,y)$ – комплекси Кана.

3 Категорії Сігала

Ідея. Категорія з множ. об'єктів $\mathcal{Q}$:

Кожному символу $A_0\to\ldots\to A_n$ – множина $\{A_0\xrightarrow{f_1}\ldots\xrightarrow{f_n}A_n\}^{A_j\in\mathcal{Q}}$

$\Delta_{\mathcal{Q}}$: об'єкти: $([n]; A_0\to\ldots\to A_n)$

Тобто: $[n]_\Delta$; $[n] \to \mathcal{Q}$

$$\left([n] := \mathrm{Ob}([n]_\Delta) = \{0, 1, \ldots, n\}\right)$$

Кожний функтор

$$[n]_\Delta \xrightarrow{f} [m]_\Delta \quad f \in \Delta([n],[m]):$$

$$\{[n] \to \mathcal{Q}\} \xleftarrow[f^*]{} \{[m] \to \mathcal{Q}\}$$

Об'єкти в $\Delta_{\mathcal{Q}}$:

$$[n]_\Delta \,;\, \alpha : [n] \to \mathcal{Q}$$

Морфізми в $\Delta_{\mathcal{Q}}$:

$$([n]_\Delta ; \alpha) \to ([m]_\Delta ; \beta) -$$

це пара

$[n]_\Delta \xrightarrow[f]{} [m]_\Delta$, така, що $f^*\beta = \alpha$.

Приклад

$$
\begin{tikzcd}
{[2]_\Delta ;} & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \\
{[1]_\Delta ;} & B_0 \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"] & B_1
\end{tikzcd}
$$

①

$$
\begin{tikzcd}
\Big(\overset{0}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} & \overset{2}{\bullet}, & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big) \\
\Big(\underset{0}{\bullet} \arrow[u] & \underset{1}{\bullet} \arrow[u] & , & A_0 \arrow[r] & A_1 \Big)
\end{tikzcd}
$$

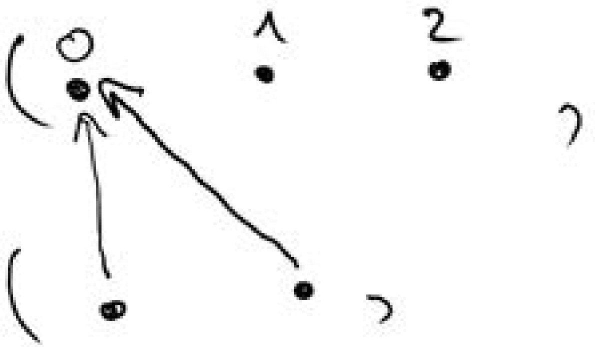
②

$$
\begin{tikzcd}
\Big(\overset{0}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} & \overset{2}{\bullet}, & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big) \\
\Big(\underset{0}{\bullet} \arrow[u] & \underset{1}{\bullet} \arrow[ur] & , & A_0 \arrow[rr] & & A_2 \Big)
\end{tikzcd}
$$

③

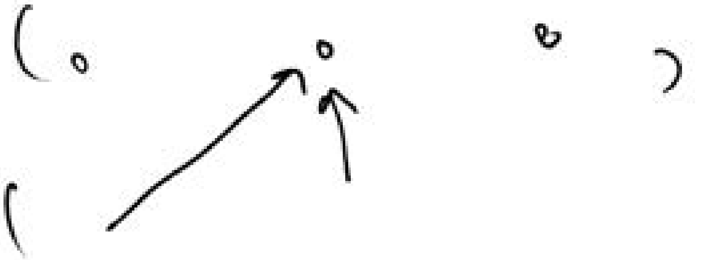
$$
\begin{tikzcd}
\Big(\overset{0}{\bullet} & \overset{1}{\bullet} & \overset{2}{\bullet}, & A_0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big) \\
\Big(\underset{0}{\bullet} \arrow[ur] & \underset{1}{\bullet} \arrow[ur] & & A_1 \arrow[r] & A_2 \Big)
\end{tikzcd}
$$

I три вироджені:

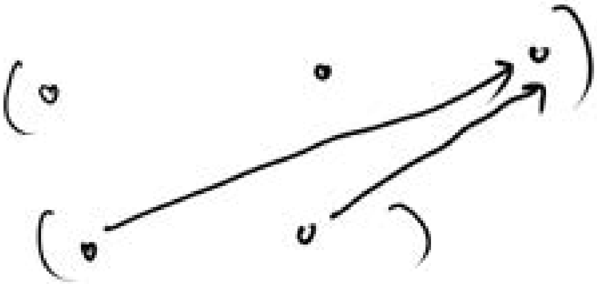


$$A_0 \to A_1 \to A_2)$$

$$A_0 \to A_0 \quad)$$



$$A_1 \longrightarrow A_1)$$



$$A_2 \longrightarrow A_2$$

Нерв категорії

$\Downarrow$

Функтор $\Delta^{op}_{\mathcal{A}} \longrightarrow Sets$

<u>Властивість</u>: Розглянемо морфізми в $\Delta_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{tikzcd}
 & ([0]_\Delta, A_n) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
([n]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n) \arrow[dr] & & ([m]_\Delta, A_n \to \dots \to A_{n+m}) \arrow[dl] \\
 & ([n+m]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C(A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C(A_0 \to \dots \to A_n) \arrow[rr, phantom, "(\star)"] & & C(A_n \to \dots \to A_{n+m})
\end{tikzcd}$$

ДЕКАРТІВ.

Категорія Сігала: $\Delta^{op}_{\mathcal{a}} \to \Delta^{\circ}\,\mathrm{Sets}$

$(\star)$ гомотопічно декартові.

Цей підхід до ∞-категорій має ту перевагу, що є зручним для того, щоб визначити (∞, n)-категорії. (∞, n)-категорія – це функтор $\Delta^{op}_{\mathcal{a}} \to \{(\infty, n-1)\text{ кат.}\}$ з властивістю Сігала.

(є тонкощі). (лекції Хініча)

4) Ляйнстер замість Сігала.
T. Leinster G. Segal

Проблема: нехай C – дг категорія.
Об'єкти: $A, B, \ldots \in \mathcal{Q}$.

$$C(A_0 \to \dots \to A_n) = C(A_0, A_1) \otimes \dots \otimes C(A_{n-1}, A_n)$$

(не $\times$, як було для $N_\bullet C$).

$$
\begin{tikzcd}
& C(A_0 \to A_1 \to A_2) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
C(A_1 \to A_2) & C(A_0 \to A_2) & C(A_0 \to A_1)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& f_1, f_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
f_2 & f_1 f_2 & f_1
\end{tikzcd}
$$

не мають сенсу

Обмежимося: $\Delta'_a \subset \Delta_a$

Морфізми:

$$([n]_\Delta, A_0 \to \dots \to A_n) \to ([m]_\Delta, B_0 \to \dots \to B_m)$$

такі, що $[n] \to [m]$

$0 \mapsto 0 \,;\, n \mapsto m$

∞-категорія Ляйнетера – це функтор

$\underline{\mathrm{I}}$ $\quad \Delta'_a \xrightarrow{C} \mathcal{S}$ — моноїдальна

$\mathcal{S} =$ sets, Δ° sets, Top, ...

з додатковою структурою

$\underline{\mathrm{II}}$

$$
\begin{tikzcd}
C(A_0 \to \dots \to A_n \to \dots \to A_{n+m}) \arrow[d, "\wr"', "\text{слабка еквівал.}"] \\
C(A_0 \to \dots \to A_n) \otimes C(A_n \to \dots \to A_{n+m})
\end{tikzcd}
$$

$\underline{\mathrm{II}}$ мусять бути сумісними з $\underline{\mathrm{I}}$ і коасоціативними.

Якщо S = Sets, Tops, ... $\otimes = \times$:

Ляйнстер $\Rightarrow$ Сігал

$$\begin{tikzcd} & C(A_0 \to \dots \to A_n) \arrow[dl, "\mathrm{II}"'] & \\ C(A_0 \to A_1) \times C(A_1 \to \dots \to A_n) \arrow[dr, "pr"] & & \\ & C(A_1 \to \dots \to A_n) & \end{tikzcd}$$

тощо

(∞, n) категорія Ляйнстера - це

$$\Delta^{\prime}_{a} \longrightarrow (\infty, n-1) \text{ кат. Ляйнстера}$$

разом з II.

Чому ДГ категорії утворюють вищу 2-категорію?

Питання Дрінфельда. Перша відповідь: Тамаркін '05.

Інші версії: | Lurie; точне посилання і зв'язок з цією лекцією - пізніше

① dgCat - $(\infty, 2)$ категорія по Ляйнстеру. (B.T., NC calculus and operads)

Для двох дг коалгебр:

$$C_1 \otimes C_2 := (C_1^{+} \otimes C_2^{+}) / k \cdot (1 \otimes 1)$$

приклад $C_1 = k[x]/k$; $C_2 = k[y]/k$; 38

$C_1 \otimes C_2 = k[x,y]/k$

$$\begin{array}{c} \mathrm{Cobar}(C_1 \otimes C_2) \\ \downarrow \\ \mathrm{Cobar}(C_1) \otimes \mathrm{Cobar}(C_2) \end{array}$$

"coshuffle"

i) $(\ldots|b_j|\ldots|c_k|\ldots|b_\ell|\ldots|c_m|\ldots)$

$$\downarrow$$

$\pm(\ldots|b_i|\ldots|b_\ell|\ldots) \otimes (\ldots|c_k|\ldots|c_m|\ldots)$

ii) $(\ldots|b \otimes c|\ldots)$

$$\downarrow$$

$$0$$

$b \in C_1 \quad c \in C_2$

Це морфізм дг алгебр; коасоціативний для $C_1, C_2, C_3, \ldots$

$C(A_0 \to \ldots \to A_n) := \mathrm{Cobar}\Big(\mathrm{Bar}\,C(A_0, A_1) \otimes \ldots \otimes \mathrm{Bar}\,C(A_{n-1}, A_n)\Big)$

I індуковані $\mathrm{Bar} \otimes \mathrm{Bar} \to \mathrm{Bar}$

II індуковані coshuffle

ДГ категорії – категорія Лейнстера в $S = dgCat$.

② Інший підхід до структури Лейнстера на dg cat: Шойхет "Deligne conjecture..."
B.Shoikhet $\approx$ '13, '15.

③ Дг категорії утворюють категорію Сігала в квазікатегоріях. (Фаонте)
G. Faonte

i) A_∞-нерв ДГ (чи A_∞) категорії:
(Хініч, Фаонте, ...):

$$N_n \mathcal{A} := A_\infty \text{functors}\left(k[n]_\Delta, \mathcal{A}\right)$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{dgCocat}}\left(\mathrm{Bar}\, k[n]_\Delta, \mathrm{Bar}\, \mathcal{A}\right)$$

Автоматично симпліціальна множ.; задовольняє властивості Joyal'а

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & N_\bullet \mathcal{A} \\ \Delta^n \arrow[ur, "\exists"'] & \end{tikzcd} \qquad 0 < i < n$$

$$C(A_0 \to \ldots \to A_n) :=$$
$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{dgCocat}}\left(\mathrm{Bar}\, k[n]_\Delta, \mathrm{Bar}\, C(A_0, A_1) \times \ldots \times \mathrm{Bar}\, C(A_{n-1}, A_n)\right)$$

Наступне питання: як це розповсюдити до вищих категорій зі слідом ?

Як коланцюги діють на ланцюгах ?

Трошки вбік:

Що діє на некомутативних формах?

Якісь н.к. диф. оператори. Наприклад:

$$D : \bar{A} \to A \quad L_D$$

$$a_0 da_1 \dots da_n \mapsto Da_0 \cdot da_1 \dots da_n + \sum a_0 \cdot da_1 \cdot \dots \cdot dDa_j \cdot \dots \cdot da_n$$

("похідна Лі").

Але також:

$$a_0 da_1 \dots da_n \xrightarrow{\iota_D} \sum_{j=1}^{n} \pm a_0 \cdot da_1 \cdot \dots \cdot Da_j \cdot da_{j+1} \dots$$

Для $D : \bar{A}^{\otimes k} \to A$ є можливості:

$$a_0 da_1 \dots da_j \cdot dD(a_{j+1}, \dots, a_{j+k}) \cdot da_{j+k+1} \dots$$

або

$$\cdot D(a_{j+1}, \dots, a_{j+k}) \cdot$$