Probabilités/*Probability Theory*

Inégalités de Sobolev logarithmiques sur un espace de chemins

Elton P. Hsu

Résumé – Soit $W_o(M)$ l'espace des chemins $\gamma : [0, 1] \to M$ sur une variété riemannienne complète connexe de dimension n tels que $\gamma(0) = o \in M$ et soit ν la mesure de Wiener sur $W_o(M)$. Nous prouvons une inégalité de Sobolev logarithmique sur $W_o(M)$: si $\mathrm{Ric}_M \geqq -c$ pour une constante c non négative,

$$\int_{W_o(M)} F^2 \log|F|\, d\nu \leqq C_M \|DF\|^2 + \|F\|^2 \log\|F\|$$

avec $C_M \leqq (1 + ce^c)^2$.

Logarithmic Sobolev inequalities on path spaces

Abstract – *Suppose that $W_o(M)$ is the space of paths $\gamma : [0, 1] \to M$ on a complete connected Riemannian manifold M of dimension n such that $\gamma(0) = o \in M$. We prove a logarithmic Sobolev inequality on $W_o(M)$: If $\mathrm{Ric}_M \geqq -c$ for a nonnegative constant c, then*

$$\int_{W_o(M)} F^2 \log|F|\, d\nu \leqq C_M \|DF\|^2 + \|F\|^2 \log\|F\|$$

with $C_M \leqq (1 + ce^c)^2$.

1. Énoncés des résultats. – Soient M une variété riemannienne complète connexe de dimension n et o un point de M fixé. Soit

$$W_o(M) = \{\gamma \in C([0, 1], M) : \gamma(0) = o\}$$

l'espace des chemins issus de o dans M. La mesure de Wiener ν_o sur M est la loi du mouvement brownien issu de o à valeurs dans M.

Le gradient DF d'une fonction F sur $W_o(M)$ est défini de la façon suivante. On choisit un repère orthonormé U_o au point o. Soit $\mathbb{H}$ l'espace des fonctions de Cameron-Martin à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et nulles en zéro. Si $h \in \mathbb{H}$, définissons le champ de vecteurs D_h sur $W_o(M)$ par $D_h(\gamma)_s = U(\gamma)_s h_s$ où $U(\gamma) \in W_o(O(M))$ est le relèvement horizontal de γ ($U(\gamma)_0 = U_o$) dans le fibré principal des repères orthonormés $O(M)$. Pour une fonction cylindrique F sur $W_o(M)$ de la forme $F(\gamma) = f(\gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_l})$ avec $0 \leqq s_1 < \ldots < s_l \leqq 1$ et une fonction $M \times \ldots \times M \to \mathbb{R}^1$ régulière, on définit

$$DF(\gamma) = \sum_{i=1}^{l} (s \wedge s_i)\, U(\gamma)_{s_i}^{-1} \nabla^{(i)} F(\gamma),$$

où $\nabla^{(i)} F$ est le gradient par rapport à la i-ième variable de f. Le gradient D ainsi défini a une fermeture unique dans $L^2(W_o(M), \nu)$.

Nous allons démontrer une inégalité de Sobolev logarithmique pour l'opérateur de gradient D sur $W_o(M)$ du type suivant.

Théorème 1.1. – *Soit M une variété riemannienne telle que $\mathrm{Ric}_M \geqq -c$ pour une constante non négative c. Alors,*

$$\int_{W_o(M)} F^2 \log|F|\, d\nu \leqq C_M \|DF\|^2 + \|F\|^2 \log\|F\|,$$

Note présentée par Paul-André Meyer.

0764-4442/95/03201009 $ 2.00 © Académie des Sciences

avec

$$C_M = e^c \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{ce^c - e^c + 1}\right)^2 \leqq (1 + ce^c)^2.$$

Le cas où $M = G$, un groupe de Lie [avec les $(\pm)$-connexions de Cartan], est dû à Gross [3].

2. Un cas de dimension finie. – Soit μ la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^n$

$$\mu_s(dx) = \left(\frac{1}{2\pi s}\right)^{n/2} e^{-|x|^2/2s}\, dx.$$

On a une inégalité de Sobolev logarithmique:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log|f|\, d\mu_s \leqq s \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2\, d\mu_s + \|f\|_{\mu_s}^2 \log \|f\|_{\mu_s}.$$

(*voir* Gross [2]). On a une généralisation aux variétés riemanniennes.

Théorème 2.1. – *Soit M une variété riemannienne telle que $\mathrm{Ric}_M \geqq -c$ avec $c \geqq 0$. Soit $\nu_s(dx) = p(s, o, x)\, dx$, où $p(s, o, x)$ est le noyau de la chaleur (la distribution du mouvement brownien à l'instant s). Alors,*

$$\int_M f^2 \log|f|\, d\nu_s \leqq \frac{e^{cs} - 1}{c} \|\nabla f\|_{\nu_s}^2 + \|f\|_{\nu_s}^2 \log\|f\|_{\nu_s}.$$

Preuve. – Soit $P_s f(x) = E_x f(\gamma_s) = \int_M p(s, x, y) f(y) dy$, le semigroupe de la chaleur. On a l'inégalité $|\nabla P_s f| \leqq e^{cs/2} P_s |\nabla f|$. Calculons la dérivée de $H_r = P_r\, \phi(P_{s-r} f^2)$ avec $\phi(t) = 2^{-1} t \log t$. Nous avons $H_r' \leqq e^{c(s-r)} P_s |\nabla f|^2$. L'inégalité désirée se déduit par intégration de 0 à s. □

3. Inégalité de Sobolev logarithmique sur l'espace des chemins. – Définissons l'application linéaire $\phi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$\phi_s e = e - \frac{1}{2} \int_0^s \mathrm{Ric}_{U_\tau}(H\, \phi_\tau\, e)\, d\tau,$$

où $H = \{H_i\}$ sont les champs de vecteurs horizontaux canoniques de $O(M)$. Le résultat suivant peut être prouvé par la méthode de couplage brownien.

Proposition 3.1. – *Soit $F(\gamma) = f(\gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_l})$ une fonction cylindrique sur $W_o(M)$. Alors,*

$$\nabla E_x F = E_x \left\{ \sum_{i=1}^{l} \phi_{s_i}^* U_{s_i}^{-1} \nabla^{(i)} F \right\}.$$

Proposition 3.2. – *Soit $F(\gamma) = f(\gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_l})$ une fonction cylindrique sur $W_o(M)$. Alors*

$$\int_{W_o(M)} F^2 \log|F|\, d\nu \leqq e^c \sum_{i=1}^{l} (s_i - s_{i-1})\, E \left| \sum_{j=i}^{l} \phi_{s_i, s_j}^* U_{s_j}^{-1} \nabla^{(j)} F \right|^2 + \|F\|^2 \log\|F\|,$$

où l'application $\phi_{s_0, s} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pour $s \geqq s_0$ est définie par

$$\frac{d}{ds} \phi_{s_0, s}\, e = -\frac{1}{2} \mathrm{Ric}_{U_s}(H\, \phi_{s_0, s}\, e), \qquad \phi_{s_0, s_0}\, e = e,$$

pour tout $e \in \mathbb{R}^n$.

Preuve. – Pour la simplicité nous supposons que

$$F(\gamma) = f(\gamma_{s_1}, \gamma_{s_2}).$$

En utilisant la propriété de Markov et le théorème 2.1 on a

$$\begin{aligned} \|F\|^2 \log \|F\| &= \frac{1}{2} EE_{\gamma_{s_1}} f(\gamma_0, \gamma_{s_2-s_1})^2 \log EE_{\gamma_{s_1}} f(\gamma_0, \gamma_{s_2-s_1})^2 \\ &= \frac{1}{2} Ef_1(\gamma_{s_1})^2 \log Ef_1(\gamma_{s_1})^2 \\ &\geqq -\frac{e^{cs_1}-1}{c} E|\nabla f_1(\gamma_{s_1})|^2 + Ef_1(\gamma_{s_1})^2 \log |f_1(\gamma_{s_1})|, \end{aligned}$$

où $f_1(x) = \sqrt{E_x f(\gamma_0, \gamma_{s_2-s_1})^2}$. Par la proposition 3.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$E|\nabla f_1(\gamma_{s_1})|^2 \leqq E|U_{s_1}^{-1} \nabla^{(1)} F + \phi_{s_1, s_2}^* U_{s_2}^{-1} \nabla^{(2)} F|^2.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (1) \qquad \|F\|^2 \log \|F\| \geqq &- e^c s_1 E|U_{s_1}^{-1} \nabla^{(1)} F + \phi_{s_1, s_2}^* U_{s_2}^{-1} \nabla^{(2)} F|^2 \\ &+ Ef_1(\gamma_{s_1})^2 \log |f_1(\gamma_{s_1})|. \end{aligned}$$

On a en utilisant le théorème 2.1 encore une fois

$$(2) \quad Ef_1(\gamma_{s_1})^2 \log |f_1(\gamma_{s_1})| \geqq -e^c (s_2 - s_1) E|U_{s_2}^{-1} \nabla^{(2)} F|^2 + E\{F^2 \log |F|\}.$$

On obtient le résultat immédiatement. □

Rappelons que si $F(\gamma) = f(\gamma_{s_1}, \ldots, \gamma_{s_l})$ est une fonction cylindrique sur $W_o(M)$,

$$|DF(\gamma)|_{\mathsf{H}}^2 = \sum_{i=1}^{l} (s_i - s_{i-1}) \left| \sum_{j=i}^{l} U_{s_j}^{-1} \nabla^{(j)} F \right|^2.$$

Par un calcul très simple, on a

LEMME 4.2 :

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{l} (s_i - s_{i-1}) \left| \sum_{j=i}^{l} \phi_{s_i, s_j}^* U_{s_j}^{-1} \nabla^{(j)} F \right|^2 \leqq \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{ce^c - e^c + 1}\right)^2 |DF|_{\mathsf{H}}^2.$$

Preuve du théorème 1.1. – Il résulte directement de la proposition 3.1 et de l'inégalité ci-dessus. □

Remarque. – Fang [1] a prouvé pour une variété riemannienne compacte une inégalité de Poincaré sur $W_o(M)$ du type

$$\|F - EF\|^2 \leqq g_M \|DF\|^2.$$

Le théorème 1.1 entraîne que cette inégalité est valable pour une variété riemannienne complète connexe à courbure de Ricci $\geqq -c$ avec $c \geqq 0$ et $g_M \leqq c_M^{-1}$. En particulier, si la courbure de Ricci de M est non négative, le trou spectral de l'opérateur de Ornstein-Uhlenbeck $L = -D^* D$ est supérieur à $+1$.

Note remise le 14 novembre 1994, acceptée le 31 janvier 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. FANG, Une inégalité du type de Poincaré sur un espace de chemins, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 318, série I, 1994, p. 257-260.

[2] L. GROSS, Logarithmic Sobolev inequalities, *Amer. J. Math.*, 97, 1975, p. 1061-1083.

[3] L. GROSS, Logarithmic Sobolev inequalities on Lie groups, *Illinois J. Math.*, 36, 1992, p. 447-490.

Department of Mathematics, Northwestern University,
Evanston IL 60208, USA.