Probabilités/*Probability Theory*

Sur la fonction Θ d'une variété riemannienne à bord

Pei HSU

Résumé — Soit Ω un domaine compact d'une variété riemannienne de dimension n, dont le bord $\partial\Omega$ est lisse. Soient $0<\lambda_1<\lambda_2\leqq\ldots$ les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami avec la condition frontière $\{\partial/\partial n+\gamma\}\varphi=0$. La fonction $\Theta_\gamma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\lambda_n t]$ possède, quand $t\to 0$, un développement asymptotique de la forme

$$(4\pi t)^{n/2}\Theta_\gamma(t)=c_0+c_1 t^{1/2}+c_2 t+c_3 t^{3/2}+\ldots$$

Les valeurs de c_0 et c_1 sont bien connues. Dans ce travail nous calculons explicitement les coefficients c_2 et c_3 en termes de constantes géométriques du domaine Ω.

On the Θ-function of a compact Riemannian manifold with boundary

Abstract — *Let Ω be a compact domain on a Riemannian manifold of dimension n with smooth boundary. Let $0<\lambda_1<\lambda_2\leqq\ldots$ be the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator Δ with boundary condition $[\partial/\partial n+\gamma]\varphi=0$. The corresponding Θ-function $\Theta_\gamma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-\lambda_n t]$ has an asymptotic expansion*

$$(4\pi t)^{n/2}\Theta_\gamma(t)=c_0+c_1 t^{1/2}+c_2 t+c_3 t^{3/2}+\ldots$$

The values of c_0 and c_1 are well known. In the present work we compute explicitly the coefficients c_2 and c_3 in terms of geometric quantities associated with the manifold.

On considère le problème $\Delta\varphi+\lambda\varphi=0$, sur Ω, $(\partial\varphi/\partial n)+\gamma\varphi=0$, sur $\partial\Omega$. Désignons par $0<\lambda_1<\lambda_2\leqq\ldots$ les valeurs propres du problème. La fonction Θ est définie par $\Theta_\gamma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{-\lambda_n t\}$. En désignant par $p_\gamma(t, x, y)$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur Δ avec la condition frontière indiquée ci-dessus, on sait que $\Theta_\gamma(t)=\int_\Omega p_\gamma(t, x, x)\,dx$ a un développement asymptotique du type

$$(4\pi t)^{n/2}\Theta_\gamma(t)\sim c_0+c_1 t^{1/2}+c_2 t+c_3 t^{3/2}+\ldots$$

Les valeurs de c_0 et c_1 sont bien connues.

La valeur de c_2 est connue dans le cas de $\gamma\equiv 0$ (condition de Neumann) et de $\gamma\equiv\infty$ (condition de Dirichlet) (McKean-Singer [2]). Dans le cas général on l'a trouvée seulement pour des variétés très spéciales, *voir* Zayed [6]. Quant à la valeur de c_3, on la connaît très peu. Dans le cas d'un domaine euclidien de dimension 2 on a (Pleijel [3])

$$(1)\qquad c_3=\begin{cases}\dfrac{1}{64}\sqrt{\pi}\displaystyle\int_{\partial\Omega}k(z)^2\,\sigma(dz) & \text{avec la condition de Dirichlet,}\\[2ex] \dfrac{7}{64}\sqrt{\pi}\displaystyle\int_{\partial\Omega}k(z)^2\,\sigma(dz) & \text{avec la condition de Neumann,}\end{cases}$$

où $k(z)$ est la courbure de Ω. On connaît aussi c_3 dans le cas d'un domaine euclidien strictement convexe de dimension 3 avec condition de Dirichlet (Waechter [4])

$$(2)\qquad c_3=\frac{1}{64}\sqrt{\pi}\int_{\partial\Omega}[k_1(z)-k_2(z)]^2\,\sigma(dz),$$

Note présentée par Paul-André MEYER.

0249-6291/89/03090507 $ 2.00 © Académie des Sciences

$k_1(z)$, $k_2(z)$ désignant les courbures principales de la surface $\partial\Omega$ au point z.

En utilisant une méthode intéressante et indirecte, on a réussi à trouver les formules de c_2 et de c_3 dans un cas plus général. Les démonstrations détaillées des résultats présentés ici paraîtront ailleurs, *voir* [1].

I. Énoncés des résultats. — On désigne par H la deuxième forme fondamentale de la frontière $\partial\Omega$, par $K(x)$ la courbure scalaire de Ω au point x, par $K^{\partial\Omega}(z)$ la courbure scalaire de $\partial\Omega$ au point z avec la structure riemannienne induite, et par $\mathrm{Ric}(n)(z)$ la courbure de Ricci de Ω dans la direction normale n.

Théorème 1. — *Les quatre premières constantes dans le développement asymptotique de la fonction Θ avec condition frontière $[\partial/\partial n+\gamma]\varphi=0$ sont*

$$c_0=|\Omega|, \qquad c_1=\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\partial\Omega|,$$

$$c_2=\frac{1}{6}\int_{\Omega}K(x)\,dx-\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega}[\mathrm{tr}\,H(z)+6\gamma(z)]\,\sigma(dz),$$

$$c_3=\sqrt{\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{12}K^{\partial\Omega}+\frac{29}{96}\mathrm{tr}\,H(z)^2-\frac{37}{192}(\mathrm{tr}\,H(z))^2+\frac{1}{8}\mathrm{Ric}(n)(z)\right]\sigma(dz)$$
$$+\sqrt{\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2}\gamma(z)\,\mathrm{tr}\,H(z)+\gamma(z)^2\right]\sigma(dz).$$

On obtient les constantes avec la condition frontière de Neumann en posant $\gamma\equiv 0$.

Théorème 2. — *Les quatre premières constantes dans le développement asymptotique de la fonction Θ avec condition frontière de Dirichlet sont*

$$c_0=|\Omega|, \qquad c_1=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\partial\Omega|,$$

$$c_2=\frac{1}{6}\int_{\Omega}K(x)\,dx-\frac{1}{3}\int_{\partial\Omega}\mathrm{tr}\,H(z)\,\sigma(dz),$$

$$c_3=\sqrt{\pi}\int_{\partial\Omega}\left[-\frac{1}{12}K^{\partial\Omega}(z)-\frac{5}{96}\mathrm{tr}\,H(z)^2+\frac{13}{192}(\mathrm{tr}\,H(z))^2-\frac{1}{8}\mathrm{Ric}(n)(z)\right]\sigma(dz).$$

II. Réduction au cas de Neumann. — On désigne les noyaux de la chaleur $p_0(t, x, y)$ et $p_\infty(t, x, y)$ par $p_N(t, x, y)$ et $p_D(t, x, y)$, respectivement. Le noyau $p_\gamma(t, x, y)$ peut être exprimé en forme d'une série convergente : $p_\gamma(t, x, y))=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n F_n(t, x, y)$, où les fonctions F_n sont définies par la relation de récurrence suivante :

$$F_0(t, x, y)=p_N(t, x, y),$$

$$F_n(t, x, y)=\int_0^t ds\int_{\partial\Omega}\sigma(dz)\,p_N(t-s, x, z)\,\gamma(z)\,F_{n-1}(s, z, y).$$

Par un calcul simple, on peut démontrer que

$$\int_{\Omega}F_1(t, x, x)\,dx=t\int_{\Omega}p_N(t, z, z)\,\gamma(z)\,\sigma(dz). \tag{3}$$

On obtient immédiatement

$$(4\pi t)^{n/2}\int_{\Omega} F_2(t, x, x)\,dx=\sqrt{\pi}\,t^{3/2}\int_{\partial\Omega}\gamma(z)^2\,\sigma(dz)+O(t^2).$$

Pour obtenir les deux premiers termes dans (3), on a besoin d'un développement du type

$$(4\pi t)^{n/2}\,p_N(t, z, z)=2\left[1-\frac{1}{4}\operatorname{tr}H(z)\sqrt{\pi t}\right]+O(t),\qquad z\in\partial\Omega. \tag{4}$$

On a après un calcul pas très compliqué

$$\int_{\Omega} F_1(t, x, x)\,dx=2t\int_{\partial\Omega}\gamma(z)\,\sigma(dz)-\sqrt{\pi}\,t^{3/2}\int_{\partial\Omega}\gamma(z)\operatorname{tr}H(z)\,\sigma(dz)+O(t^2).$$

III. LA MÉTHODE DE LA PARAMÉTRIX. — *Voir* McKean-Singer [2]. Considérons le double $\tilde{\Omega}=\Omega\cup\Omega^*/\partial\Omega\sim\partial\Omega^*$, où Ω^* est une copie de Ω. Sur la variété $\tilde{\Omega}$ on se donne une structure riemannienne naturelle qui a une discontinuité régulière sur le bord de contact. On désigne par x^* le point symétrique sur Ω^* d'un point x sur Ω. Soit $q(t, x, y)$ le noyau de la chaleur de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\tilde{\Omega}$. Les noyaux de la chaleur de Dirichlet et de Neumann sur Ω sont, respectivement :

$$p_D(t, x, y)=q(t, x, y)-q(t, x^*, y),\qquad p_N(t, x, y)=q(t, x, y)+q(t, x^*, y).$$

$q(t, x, y)$ peut être exprimé à l'aide d'une série convergente $q(t, x, y)=\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t, x, y)$ avec la relation de récurrence

$$q_0(t, x, y)=(4\pi t)^{-n/2}\,e^{-(y-x)^T g(y)(y-x)/4t},$$

$$q_n(t, x, y)=\int_0^t ds\int_{E^n} dz\, q_{n-1}(t-s, x, z)\,f(s, z, y)$$

où $f(s, z, y)=[\Delta_z-g^{ij}(y)\,\partial_i\partial_j]\,q_0(s, z, y)$. Suivant McKean-Singer [2], il suffit de calculer les développements des intégrales des fonctions

$$q_0(t, x, x),\quad q_0(t, x^*, x),\quad q_1(t, x, x),\quad q_1(t, x^*, x),\quad q_2(t, x, x),\quad q_2(t, x^*, x).$$

sur $\Omega_\varepsilon=\{x\in\Omega : d(x, \partial\Omega)\leq\varepsilon\}$.

Dans ce but, on utilise le résultat suivant.

LEMME 3. — *Supposons que* $\tilde{x}=(x^2, x^3, \ldots, x^n)$ *sont les coordonnés cartésiennes sur l'espace tangent d'un point* $0\in\partial\Omega$ *(considéré comme origine) et que* x^1 *est la distance de* $x=(x^1, \tilde{x})$ *à* $\partial\Omega$. *La matrice de la structure riemannienne possède le développement suivant dans un voisinage de* 0 :

$$g_{ij}(x)=\delta_{ij}+2H_{ij}|x^1|+(-R_{1i1j}+(H^2)_{ij})|x^1|^2+2\,\partial_k H_{ij}x^k|x^1|-\frac{1}{3}R^{\partial\Omega}_{ikjl}x^k x^l+O(|x|^3),$$

où $\partial\Omega$, R_{ikjl} *et* $R^{\partial\Omega}_{ikjl}$ *sont respectivement les tenseurs de courbure sur* Ω *et* $\partial\Omega$.

On peut démontrer les faits suivants :

(i) $c_3=\int_{\partial\Omega} c_3(z)\,\sigma(dz)$, où $c_3(z)$ est une combinaison linéaire du type

$$c_3(z)=AK^{\partial\Omega}(z)+B\operatorname{Ric}(n)(z)+C\operatorname{tr}H(z)^2+D(\operatorname{tr}H(z))^2$$

avec des constantes A, B, C, D universelles *qui ne dépendent pas de la dimension n.*

(ii) Après un calcul aisé, on trouve dans le cas de Neumann,

$$A=(1/12)\sqrt{\pi},\qquad B=(1/8)\sqrt{\pi},$$

et dans le cas de Dirichlet $A=-(1/12)\sqrt{\pi}$, $B=-(1/8)\sqrt{\pi}$.

Ces deux faits nous permettent de trouver les constantes C et D en utilisant quelques calculs explicites dans des cas particuliers.

IV. Identification des constantes universelles C et D. — On va utiliser les faits suivants :

(*a*) Dans le cas de l'espace euclidien de dimension $n=2$, on a

$$K^{\partial\Omega}(z)=0, \qquad \mathrm{Ric}(n)(z)=0, \qquad \mathrm{tr}\,H(z)^2=k(z)^2, \qquad \mathrm{tr}\,H(z)=-k(z).$$

(*b*) Dans le cas d'une boule euclidienne de dimension $n=3$, et de rayon un, on a les développements explicites pour

$$(4\pi t)^{3/2}\,\Theta_N(t)$$

(*voir* Zayed [5]), et pour

$$(4\pi t)^{3/2}\,\Theta_D(t)$$

(*voir* Waechter [4]). Dans les deux cas, la constante c_3 est égale à zéro.

Cas de Neumann. — Les résultats (1), (*a*), et (*b*) nous donnent deux équations

$$C+D=\frac{7}{64}\sqrt{\pi}, \qquad A+C+2D=0,$$

d'où $C=(29/96)\sqrt{\pi}$, $D=-(37/192)\sqrt{\pi}$.

Cas de Dirichlet. — On obtient de la même façon, $C=-(5/96)\sqrt{\pi}$, $D=(13/192)\sqrt{\pi}$.

Remarque. — Pour un domaine de E^3, on a

$$K^{\partial\Omega}=2k_1k_2 \quad (\textit{Theorema egregium} \text{ de Gauss}),$$
$$\mathrm{Ric}(n)=0, \qquad \mathrm{tr}\,H=-k_1-k_2, \qquad \mathrm{tr}\,H^2=k_1^2+k_2^2.$$

On retrouve la formule (2) à partir de la formule générale. Dans le cas de Neumann, on obtient

$$c_3=\frac{7}{64}\sqrt{\pi}\int_{\partial\Omega}[k_1(z)-k_2(z)]^2\,\sigma(dz).$$

Note remise le 15 mars, acceptée le 18 avril 1989.

Références bibliographiques

[1] P. Hsu, *On the Θ-function of a Riemannian manifold with boundary*, prétirage.

[2] H. P. McKean et I. M. Singer, Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, *J. of Diff. Geo.*, 1, 1967, p. 43-69.

[3] A. Pleijel, A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes, *Ark. Mat.*, 2, 1954, p. 533-569.

[4] R. T. Waechter, On hearing the shape of a drum: an extension to higher dimensions, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 72, 1972, p. 439-447.

[5] E. M. E. Zayed, Eigenvalues of the Laplacian: an extension to higher dimensions, *I.M.A. J. of Appl. Math.*, 33, 1984, p. 83-99.

[6] E. M. E. Zayed, An inverse eigenvalues problem for a general domain, *J. of Math. Anal. Appl.*, 112, 1985, p. 455-470.

University of Minnesota, 206 *Chuch Street, S.E., Minneapolis, MN* 55455 *U.S.A.*