1982年 第2卷 第3期
Vol.2, No.3, 1982

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH & EXPOSITION

关于对数位势的一个注记*

徐 佩
（中国科学院应用数学研究所）
（美国斯坦福大学数学系）

平面上和布朗运动相联系的位势核是一个贝塞尔函数，此函数在原点的展开式是已知的．在这个注记里．我们将从 α -位势的基本公式出发，由 $\alpha\to 0$ 的逼近来推导平面上的对数位势的一些性质．这种引进对数位势的方法比其他常见的方法更为直接．

令

$$B_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^2:\ \|x\|<\varepsilon\}$$

设 f 是定义 $\mathbf{R}^2$ 上，具有紧支撑的连续函数：$\mathrm{supp} f\subset B_r$．设 $R>r>0$．暂记 $B=B_R$ 以避免重复下标．

设 $\{x_t,t\geqslant 0\}$ 为平面上的标准布朗运动，$\{P_t,t\geqslant 0\}$ 为对应的算子半群，u^α为 α-位势算子 $(\alpha>0)$：

$$u^\alpha f(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_t f(x)\,dt.$$

定义

$$P^\alpha_{B^c} f(x)=E^x\{e^{-\alpha\tau_B}f(x_{\tau_B});\tau_B<\infty\},$$
$$\tau_A=\inf\{t>0,\ x(t)\in A^C\}$$

为集A的首次离开时．

考虑 α -位势的基本公式：

$$u^\alpha f-P^\alpha_{B^c}u^\alpha f=E^0\int_0^{\tau_B}e^{-\alpha t}f(x_t)\,dt.$$

令 $\alpha\downarrow 0$，由控制收敛定理

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\{u^\alpha f-P^\alpha_{B^c}u^\alpha f\}=E^0\int_0^{\tau_B}f(x_t)\,dt. \tag{1}$$

我们进一步讨论等式(1)的左面．由定义，

* 1981年 9 月23日收到．
推荐者：钟开莱(美国 Stanford 大学)．

$$u^{\alpha}f(x)=\int u^{\alpha}(x,y)f(y)dy$$

$$P^{\alpha}_{B^c}u^{\alpha}f(x)=\int P^{\alpha}_{B^c}u^{\alpha}(x,y)f(y)dy$$

这里和以后，如果没有特别标明的话，积分总是在$\mathbf{R}^2$上进行的．我们有

$$u^{\alpha}f(x)-P^{\alpha}_{B^c}u^{\alpha}f(x)=\int G^{\alpha}_{B}(x,y)f(y)dy \qquad (2)$$

其中

$$G^{\alpha}_{B}(x,y)=u^{\alpha}(x,y)-P^{\alpha}_{B^c}u^{\alpha}(x,y)$$

$$u^{\alpha}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\left(\alpha t+\frac{\|x-y\|^2}{2t}\right)}\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{1}{\pi}K_0(\sqrt{2\pi}\|x-y\|)$$

贝塞尔函数$K_0(x)$在$x=0$的展开式为

$$K_0(x)=-\log\frac{x}{2}+C+O(x^2\log x) \qquad (3)$$

(参见[1],340页，公式(9)和961页公式8.447,37)

$$\pi G^{\alpha}_{B}(x,y)=E^{x}\{K_0(\sqrt{2\alpha}\|x-y\|)-e^{-\alpha\tau_B}K_0(\sqrt{2\alpha}\|x_{\tau_B}-y\|)\}$$

$$=E^{x}\{K_0(\sqrt{2\alpha}\|x-y\|)-K_0(\sqrt{2\alpha}\|x_{\tau_B}-y\|)\}$$

$$+E^{x}\{(1-e^{-\alpha\tau_B})K_0(\sqrt{2\alpha}\|x_{\tau_B}-y\|)\}$$

$$\triangleq G^{\alpha}_{1}(x,y)+G^{\alpha}_{2}(x,y)$$

以下设$\|x\|$，$\|y\|<\mathrm{R}$，因此$\sqrt{2\alpha}\|x-y\|\leqslant 2\sqrt{2\alpha}\mathrm{R}$．利用开展式(3)．如果$\alpha$充分小，

$$|(1-e^{-\alpha\tau_B})K_0(\sqrt{2\alpha}\|x_{\tau_B}-y\|)|\leqslant K\alpha\tau_B|\log\alpha|$$

K是某个常数．我们知道

$$E^{x}\tau_B=\frac{1}{2}(\mathrm{R}^2-\|x\|^2)$$

所以

$$|G^{\alpha}_{2}(x,y)|\leqslant K\mathrm{R}^2|\alpha\log\alpha|$$

由此可见，对于任何的$x\in B$，

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\int G^{\alpha}_{2}(x,y)f(y)dy=0 \qquad (5)$$

仍由展开式(3)

$$K_0(\sqrt{2\alpha}\|x-y\|)-K_0(\sqrt{2\alpha}\|x_{\tau_B}-y\|)$$

$$=-\log\frac{\|x-y\|}{\|x_{\tau_B}-y\|}+O(\alpha\log\alpha)$$

这里强调指出“O”不依赖于x，y．

$$G^{\alpha}_{1}(x,y)=E^{x}\log\|x_{\tau_B}-y\|-\log\|x-y\|+O(\alpha\log\alpha)$$

熟知：$u(x)=E^x\log\|x_{\tau_B}-y\|$ 是下述狄利西列问题的解：

$$\begin{aligned} &\Delta u=0 && \text{在} B \text{上} \\ &u(x)=\log|x-y| && \text{在} \partial B \text{上} \end{aligned}$$

u 可以很容易地求得，例如用 Kelvin 变换（参见[2]，114 页）

$$E^x\log\|x\tau_B-y\|=\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R},$$

这里

$$y^*=\frac{R^2}{\|y\|^2}y$$

是 y 关于 $B=B_R$ 的反演．由此可知

$$G_1^a(x,y)=\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R\|x-y\|}+O(a\log a),$$

所以

$$\lim_{a\downarrow 0}\int G_1^a(x,y)f(y)dy=\int\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R\|x-y\|}f(y)dy,\qquad x\in B. \tag{6}$$

从(2)，(4)，(5)和(6)得出：

$$G_Bf(x)=E^x\int_0^{\tau_B}f(x_t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R\|x-y\|}f(y)dy, \tag{7}$$

由此得知 $\frac{1}{\pi}\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R\|x-y\|}$ 就是圆 $B=B_R$ 的格林函数．

如果 f 是 Hölder 连续的，则 G_Bf 两次连续可导，而且在 B_R 上

$$\Delta G_{B_R}f=-2f \tag{8}$$

（见[2]，第四章第 6 节）．下标 R 注明在(8)式中以表示对 R 的依赖．

由（7），$x\in B_R$，

$$G_{B_R}f(x)-\frac{1}{\pi}\int\log\frac{1}{\|x-y\|}f(y)dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R^2}f(y)\,dy+\frac{\log R}{\pi}\int f(y)dy. \tag{9}$$

（9）式的右边是 x 的调和函数，所以将（8）式中的 $G_{B_R}f$ 换成 f 的对数位势

$$Vf(x)=\frac{1}{\pi}\int\log\frac{1}{\|x-y\|}f(y)dy \tag{10}$$

（8）式仍旧成立．亦即在全平面上有

$$\Delta Vf=-2f$$

我们将得到的结果总结在下面的定理中．

定理　设 f 是平面上具有紧支撑的连续函数，$\mathrm{supp}f\subset B_r$．对于任何的 $R>r>0$．$x\in B_R$

有

$$G_{B_R}f(x)\triangleq E^x\int_0^{\tau_{B_R}}f(x_t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R\|x-y\|}f(y)\,dy.$$

设 Vf 是 f 的对数位势(10)，若 $\int f(y)dy=0$，则

$$\lim_{R\to\infty}E^x\int_0^{\tau_{B_R}}f(x_t)\,dt=Vf(x)$$

在全平面上一致成立.

进一步设 f 是 Hölder 连续的，则在 B_R 上 $\Delta G_{B_R}f=-2f$；在全面上 $\Delta Vf=-2f$.

证明 只有一致收敛性需要证明. 设 $R>r$. $\|y\|\leqslant r$.

$$\log\frac{\|y\|\,\|x-y^*\|}{R^2}=\log\left\|\frac{y}{\|y\|}-\frac{x\|y\|}{R^2}\right\|<-\log\left(1-\frac{r}{R}\right)$$

如果 $x\in B_R$. 由(9)和假设 $\int f(y)dy=0$，对于 $x\in B_R$,

$$|G_{B_R}f(x)-Vf(x)|\leqslant-\frac{1}{\pi}\log\left(1-\frac{r}{R}\right)\int|f(y)|\,dy \tag{11}$$

如果 $x\notin B_R$，则 $G_{B_R}f(x)=0$.

$$|G_{B_R}f(x)-Vf(x)|=\frac{1}{\pi}\left|\int\log\frac{1}{\|x-y\|}f(y)\,dy\right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\left|\int\log\frac{\|x\|}{\|x-y\|}\,f(y)\,dy\right|\leqslant-\frac{1}{\pi}\log\left(1-\frac{r}{R}\right)\int|f(y)|\,dy$$

于是(11)式对任何 x 成立. 一致收敛性得证.

对于直线上的位势也可以作同样的讨论.

参 考 文 献

[1] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M., Table of Integrals, Series and Products, Academic Press (1980).

[2] Port, S.C. and Stone, C.J., Brownian Motion and Classical Potential Theory, Academic Press (1978).

A Note on the Logarithmic Potential

By Xu Bei (徐 佩)

Abstract

In this note some properties of the logarithmic potential on the plane have been derived by using the approximation upon letting $\alpha\to0$ in the basic formula for α-potentials.